

STATIQUE GRAPHIQUE

APPLIQUÉE AUX CONSTRUCTIONS

TOITURES, PLANCHERS, POUTRES, PONTS, ETC.

STATIQUE GRAPHIQUE

APPLIQUÉE AUX CONSTRUCTIONS

TOITURES, PLANCHERS, POUTRES, PONTS, ETC.

ÉLÉMENTS DU CALCUL GRAPHIQUE. — DES FORCES ET DE LEUR RÉSVLTANTE. —
DES MOMENTS FLÉCHISSANTS, DES EFFORTS TRANCHANTS. —
RECHERCHE DES MAXIMA. — CHARGE PERMANENTE. — SURCHARGE UNIFORMÉMENT RÉPARTIE.
SURCHARGE MOBILE.

DONNÉES PRATIQUES SUR LE POIDS PROPRE DES TOITURES ET SUR LEUR SURCHARGE
ACCIDENTELLE. — POUTRES PLEINES. — POUTRES A TREILLIS, SIMPLES ET MULTIPLES. —
CENTRE DE GRAVITÉ. — MOMENT D'INERTIE. — EXEMPLES ET APPLICATIONS.

PAR

MAURICE MAURER

INGÉNIEUR

Professeur agrégé à l'École Polytechnique de Budapest.

AVEC UN ATLAS DE 19 PLANCHES IN-4°

PARIS

LIBRAIRIE POLYTECHNIQUE DE J. BAUDRY, ÉDITEUR

Rue des Saints-Pères, 15

MÊME MAISON A LIÈGE, 19, RUE LAMBERT-LEBÈGUE

—
1882

Tous droits de Traduction et de Reproduction réservés

INTRODUCTION

Les immenses avantages que présentent les solutions graphiques nous ont engagé à faire paraître le présent ouvrage.

L'étude du célèbre traité de « Statique graphique » du professeur Culmann présente certaines difficultés. La théorie suppose, en effet, une connaissance approfondie de la géométrie de position, que l'on n'enseigne encore aujourd'hui que dans un nombre très-restreint d'écoles, et c'est à cette cause qu'il faut attribuer le rare emploi du calcul graphique. Ramener cette théorie à sa plus simple expression, en la basant sur les principes élémentaires de géométrie pure, tel a été notre but.

Pour rendre notre théorie encore plus compréhensible, nous n'avons pas craint de traiter, soit dans le courant d'une démonstration, soit dans des chapitres spéciaux, un grand nombre d'exemples.

Le présent ouvrage ne comporte point toutes les applications que l'on peut faire du calcul graphique ; il ne traite que les solutions purement statiques, et nous nous proposons de le compléter plus tard, en l'étendant aux problèmes reposant sur les lois de l'élasticité, poutres continues, poutres courbes, etc...

Dans le chapitre où nous avons traité les poutres composées à côté de la solution graphique, nous avons encore développé la méthode analytique, et principalement celle dite

« Méthode de Ritter ». Il sera ainsi facile de se rendre un compte exact de la concordance des deux solutions.

Aujourd'hui, le calcul graphique semble s'imposer de lui-même, et, sous peu, son enseignement se trouvera inscrit dans le programme de chaque école d'ingénieurs et d'architectes. Mais il ne faudrait pas pour cela négliger ou laisser de côté les solutions analytiques, car, dans bien des cas, une application simultanée des deux méthodes conduira le plus rapidement au but.

Budapest, en mars 1882.

ERRATA

Page 18, ligne 5 en remontant, au lieu de k , lisez K .

Page 23, ligne 15, au lieu de $\frac{Nm^2}{a^m} = \dots$, lisez $\frac{Nm^3}{a^m} = \dots$.

Page 43, ligne 6 en remontant, au lieu de (*fig. 64 et fig. 62*), lisez (*fig. 64, fig. 65 et fig. 62*).

Page 43, ligne 2 en remontant, au lieu de (*fig. 65 et 66*), lisez (*fig. 67 et 66*).

Page 44, ligne 1 en remontant, au lieu de *tangentes*, lisez *côtés*.

Page 49, ligne 15, au lieu de (2). $l = H y$, lisez (2). $l = H y_2$.

Page 51, ligne 2, au lieu de *à gauche*, lisez *à droite*.

Page 51, ligne 3, au lieu de *à droite*, lisez *à gauche*.

Page 60, ligne 11 en remontant, au lieu de $1 m^2 = 1 \times 0^t$, lisez $1 m^2 = 10^t$.

Page 70, ligne 4 en remontant, au lieu de *par*, lisez *pour*.

Page 73, ligne 8, au lieu de *le polygon*, lisez *la courbe*.

Page 78, ligne 1 en remontant, au lieu de $M_x = Y_x \cdot h = \dots$, lisez $M_x = - Y_x \cdot h = \dots$.

Page 79, ligne 3, au lieu de *momnttif néga M_x* , lisez *moment négatif M_x* .

Page 80, ligne 3. au lieu de $M_{x_1} = Y_{x_1} \cdot 1^t \cdot 5^m = 5^{mt5}$. lisez $M_{x_1} = Y_{x_1} \cdot h = 1^t \cdot 5^m = 5^{mt5}$.

Page 80, ligne 6 en remontant, au lieu de $M_x = - B \cdot l$, lisez $M_x = - B \cdot l_1$,

Page 87, ligne 12, au lieu de *la droite*, lisez *le triangle*.

Page 124, ligne 15 en remontant, au lieu de $o'a' = o'b' = 3^t5$. lisez $o'a' = o'b' = 3^t35$.

Page 139, ligne 4 en remontant, au lieu de *yy* lisez y_1y_1 .

Page 143, ligne 17 en remontant, au lieu de *épreuves*, lisez *épures*.

Page 147, ligne 4 en remontant, au lieu de *courbe*, lisez *figure*.

Page 150, ligne 4, au lieu de (*fig. 218*), lisez (*fig. 217*).

Page 176, dans le tableau au lieu de *Fer 7,82, Acier cémenté 7,79*, lisez *Fer 7,79, Acier cémenté 7,82*.

ERRATA

Page 184, ligne 9, au lieu de $q = 0,127 v^2 \frac{\sin^2(\alpha + 10)}{\cos \alpha}$, lisez $q = 0,116 v^2 \frac{\sin^2(\alpha + 10)}{\cos \alpha}$.

Page 184, ligne 10, au lieu de p , lisez q .

Page 188, lignes 1 et 2, au lieu de $h = 733 \text{ kil.}$, $v = 447 \text{ kil.}$, lisez $h = 447 \text{ kil.}$, $v = 733 \text{ kil.}$

Page 188, ligne 9, au lieu de $\frac{1}{4}v = ps$, lisez $\frac{1}{2}v = ps$.

Page 192, ligne 9 en remontant, au lieu de $8 = -1551,5$, lisez $8 = -15515,0$.

Page 197, ligne 6 en remontant, au lieu de $7 = 34 = 10^t$, lisez $6 = 34 = 10^t$.

Page 199, ligne 3, au lieu de *fig. 220*, lisez *fig. 222*.

Page 199, ligne 6 en remontant, au lieu de *7 fermes*, lisez *14 fermes*.

Page 204, ligne 11, au lieu de g^3 , lisez $g3$.

Page 205, ligne 7 en remontant, au lieu de $h = 2 \text{ m} = 12^{\text{m}}20$, lisez $h = 2 \text{ m} = 12^{\text{m}}00$.

STATIQUE GRAPHIQUE

APPLIQUÉE AUX

CONSTRUCTIONS, TOITURES, PLANCHERS, ETC.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES DU CALCUL GRAPHIQUE.

Addition et soustraction.

Dans le calcul graphique, les grandeurs se représentent par des lignes; les positives se portant dans un sens et les négatives dans le sens opposé. Ces lignes sont proportionnelles aux grandeurs qu'elles représentent.

L'addition et la soustraction sont pour ainsi dire une seule et même opération. Ainsi, en additionnant des quantités positives et négatives, nous faisons par le fait même une soustraction.

Formons par exemple (Pl. I, fig. 1) la somme des grandeurs représentées par les lignes a, b, c, d, e ; les longueurs a, c , et d sont (par ex.) positives, b et e par contre négatives.

Pour cela, prenons sur une droite un point origine quelconque O ; considérons la direction vers la droite comme positive et celle vers la gauche comme négative. Portons la longueur a à partir de O jusqu'en s et marquons ce point s par un petit trait situé au-dessus de la droite. Puis à partir de s portons la longueur b

jusqu'en t , en observant le signe. Pour distinguer l'extrémité de b (quantité négative), nous en marquerons l'extrémité par deux petits traits situés en dessous de la base d'opération. Nous porterons de même, chacune avec son signe, la longueur c à partir de t jusqu'en u , la longueur d de u en v et la longueur e de v en x .

Les extrémités de chaque longueur sont désignées par des traits d'égale grandeur. Nous les ferons plus grands au fur et à mesure que nous ajouterons une nouvelle quantité. Nous pourrons ainsi retrouver facilement chaque longueur et de plus suivre la marche dans laquelle la somme des quantités données aura été effectuée.

La droite Ox donne le résultat de l'addition, c'est-à-dire la somme cherchée. Le point x tombant ici à droite du point O , le résultat sera positif.

Nous avons pris (Pl. I, fig. 1):

$$a = + 2 ; b = - 2,9 ; c = + 1,8 ; d = + 3,4 ; e = - 1,2.$$

La droite Ox représentant la somme demandée sera alors égale à :

$$Ox = 2 - 2,9 + 1,8 + 3,4 - 1,2 = + 3,1$$

et sera à lire à la même échelle que les longueurs a, b, c, d, e .

Multiplication et division.

La multiplication et la division sont aussi deux opérations analogues que nous pourrons traiter simultanément. Posons en effet comme point de départ la formule suivante :

$$x = \frac{ab}{c}$$

Cette formule renferme aussi bien une multiplication qu'une division ; nous aurons une multiplication en posant $c=1$, et une division en faisant soit $a=1$, soit $b=1$.

Construisons tout d'abord (Pl. I, fig. 2) le produit des deux grandeurs données a et b et désignons ce produit encore inconnu par x .

Nous porterons en OA la grandeur a sur l'un des côtés d'un angle quelconque Ovu et en OB la grandeur b sur l'autre côté.

Quant à la longueur choisie comme unité, nous pourrons la porter sur l'un ou l'autre des deux côtés de l'angle, par exemple en OI sur le côté *Ou*.

Joignons AI, menons par le point B une parallèle à cette droite. Cette parallèle coupe le côté *Ov* au point X et la longueur OX= x représente le produit cherché. En effet, les triangles AOI et XOB étant semblables, nous pourrons écrire la relation suivante :

$$\frac{a}{1} = \frac{x}{b}$$

D'où :

$$x = \frac{ab}{1} = ab.$$

Nous avons pris (Pl. I, fig. 2) :

$$a = 2 \text{ et } b = 3.$$

Le résultat de la construction sera :

$$x = OX = 2 \cdot 3 = 6.$$

Nous pourrons construire de la même manière le quotient d'une division. Dans la formule générale citée plus haut, l'un des facteurs du numérateur devient alors égal à l'unité choisie.

Soit (Pl. I, Fig. 3) a à diviser par c ; soit de plus x le quotient cherché. Nous avons alors

$$x = \frac{a \cdot 1}{c}$$

Procédons d'une manière analogue à celle employée pour la multiplication, c'est-à-dire, portons sur *Ov* la longueur OA= a ; et sur *Ou*, OI= 1 et OB= c ; joignons AB et menons par I une parallèle à AB. Le résultat cherché nous sera donné par la ligne OX.

Les triangles OXI et OAB étant semblables, nous pourrons écrire la proportion suivante :

$$\frac{x}{1} = \frac{a}{c},$$

ou bien :

$$x = \frac{a \cdot 1}{c} = \frac{a}{c}.$$

Nous avons pris (Pl. I, fig. 3) :

$$a = 2; c = 4.$$

Le quotient de la division sera :

$$x = OX = \frac{2}{4} = 0,5.$$

Nous pourrons donc établir d'après ce qui précède la règle suivante :

Dans une multiplication, les facteurs a et b , dans une division les facteurs a et 1 , ne sont jamais à porter sur le même côté de l'angle et dans aucun cas les points extrêmes de ces droites ne seront à joindre.

Élévation de la deuxième puissance.

Si dans la formule générale $\frac{a b}{c} = x$, nous faisons $a = b$ et $c = 1$, nous aurons :

$$\frac{a a}{1} = a^2 = x.$$

La multiplication se transforme alors en une élévation à la deuxième puissance. La construction graphique de $x = a^2$ est donc en tous points analogue à celle d'une multiplication ou d'une division, et c'est de cette manière que nous avons construit (Pl. I, Fig. 4).

$$OX = x = a^2.$$

Nous avons pris $a = 2$, et nous avons trouvé :

$$x = OX = a^2 = 2 \cdot 2 = 4.$$

En appliquant la même méthode nous saurons déterminer les troisième, quatrième, etc., puissances de a .

Racine carrée.

Nous pourrons construire très-facilement l'expression :

$$x = \sqrt{a} = \sqrt{a \cdot 1}$$

en remarquant que x n'est autre que la moyenne proportionnelle entre la grandeur a et l'unité.

Cette expression élevée au carré donne :

$$x^2 = a \cdot 1 \text{ ou bien } \frac{a}{x} = \frac{x}{1}.$$

La construction graphique est indiquée (Pl. I, Fig. 5).

Portons sur une droite quelconque, à partir d'un point O , la longueur $Op = a$ et à partir de p sur la même droite la grandeur $pq = 1$. Décrivons sur Oq comme diamètre une demi-circonférence, et élevons en p sur Oq une perpendiculaire ps . Cette perpendiculaire coupe en s la circonférence décrite et la droite ps représente la moyenne proportionnelle cherchée x .

En effet, les triangles Osp et psq , étant semblables, donnent la relation suivante :

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{1} \text{ ou bien } x^2 = a$$

d'où :

$$x = \sqrt{a}$$

Nous avons pris (Pl. I, fig. 5) :

$$a = 4$$

et nous avons trouvé comme résultat de l'opération :

$$x = sp = \sqrt{a} = \sqrt{4} = 2.$$

Construction de la moyenne proportionnelle.

La moyenne proportionnelle entre deux quantités quelconques a et b peut se construire comme nous venons de l'indiquer ci-dessus au moyen de la formule $x = \sqrt{ab}$. Cette construction se trouve indiquée (Pl. I, Fig. 6) où nous avons porté $Op = a$ et $pq = b$. Par suite la droite $ps = x$ sera la moyenne proportionnelle cherchée.

Nous avons pris (Pl. I, fig. 6) :

$$a = 4,5 \text{ et } b = 2$$

et nous avons obtenu pour la valeur de la moyenne proportionnelle entre ces deux quantités :

$$x = ps = \sqrt{ab} = \sqrt{4,5 \cdot 2} = \sqrt{9} = 3.$$

Les droites données a et b diffèrent-elles beaucoup l'une de l'autre, il faudra alors, pour trouver leur moyenne proportionnelle, employer le procédé suivant.

Portons à partir de O (Pl. I, fig. 7) les longueurs $OA = a$ et $OB = b$; décrivons sur la différence BA, prise comme diamètre, une demi-circonférence. Menons par le point O une tangente à la circonférence décrite; la longueur $OX = x$ de cette tangente nous donnera précisément le résultat cherché. Quant au point X, il est parfaitement déterminé sur la droite OX au moyen du rayon normal à la tangente menée par le point O.

La démonstration de cette construction nous est donnée par le théorème de géométrie pure: « si par un point extérieur à une circonférence on mène une tangente à cette circonférence et une sécante, la tangente est moyenne proportionnelle entre la sécante entière et le segment extérieur »; autrement dit:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b} \text{ ou bien } x^2 = ab$$

d'où:

$$x = \sqrt{ab}.$$

Nous avons pris (Pl. I, fig. 7):

$$a = 8; b = 2$$

et nous avons trouvé comme résultat:

$$x = OX = \sqrt{ab} = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4.$$

Représentation des surfaces par des longueurs.

Une surface étant une expression du second degré, il s'en suit que, dans le calcul par lignes et dans les constructions de graphostatique, nous ne pourrions les employer directement. Il nous faudra pour cela les remplacer par des longueurs proportionnelles en les ramenant à une base de réduction. Soit par exemple une surface $F = mn$.

En divisant F par une longueur quelconque a , le résultat de l'opération représentera une ligne. La surface F se trouve ainsi ramenée à la base a , puisqu'en multipliant la longueur trouvée par a , nous aurons de nouveau la quantité F .

Soit f la longueur réduite de la surface F ; nous pouvons écrire:

$$\frac{mn}{a} = \frac{F}{a} = f.$$

La longueur f est proportionnelle à la surface F et donne le nombre de fois que l'unité adoptée a est contenue dans F . C'est pourquoi nous appellerons a « la base de réduction. »

En multipliant f par a , nous obtiendrons le nombre d'unités de surface comprises dans F , et si nous avons pris pour a l'unité de longueur, le mètre par exemple, f donnera directement le nombre de \overline{M}^2 contenus dans la surface considérée.

Si l'on a dans une construction plusieurs surfaces à représenter par des lignes, il sera bon de ramener toutes ces surfaces à la même base de réduction. Les longueurs trouvées seront comparables entre elles et dans le même rapport que les surfaces données.

La grandeur f et la grandeur a donnant le nombre d'unités de surfaces comprises dans la surface à mesurer, il sera donc bon d'exprimer a en multiples de l'unité de longueur. De plus la grandeur de f dépend du choix de a ; aussi aurons-nous toujours soin de choisir a de telle manière que f ne devienne ni trop grand ni trop petit; des longueurs, ou trop longues, ou trop petites, pouvant altérer d'une manière sensible la précision de nos constructions.

Dans tous les exemples qui suivront, nous conserverons à la base de réduction a la même longueur.

SURFACE D'UN TRIANGLE.

Soit à mesurer la surface du triangle rst et à représenter par une ligne proportionnelle (Pl. I, fig. 8). Prenons, comme base de réduction, la longueur a choisie d'une façon arbitraire. Pour déterminer la grandeur f proportionnelle à la surface du triangle donné, portons sur le côté rs le double de la longueur de base $rq = 2a$, joignons le point q au point t et par s menons une parallèle so à la droite qt , la perpendiculaire, abaissée du point o sur le côté rs , donne la longueur cherchée f .

Pour prouver la justesse de cette construction, menons la droite

oq . Le triangle roq ainsi obtenu est égal au triangle rst . Mais la surface du triangle roq est :

$$F = \frac{1}{2} 2af = af.$$

D'où :

$$f = \frac{F}{a}.$$

Dans l'exemple traité (Pl. I, fig. 8) nous avons pris le côté $rs = 3$. Considérant ce côté comme base du triangle, la hauteur sera alors égale à 4 et sa surface :

$$F = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6 \text{ unités de surface.}$$

Pour déterminer graphiquement cette même surface nous avons pris $a = 2$ et nous avons trouvé $f = 3$.

$$\text{D'où } F = af = 2 \cdot 3 = 6,$$

Dans toutes les figures de la Pl. I, les longueurs se trouvent portées à l'échelle de 0^m010 pour 1^m00.

Nous aurons donc dans ce cas :

$$a = 2^m ; f = 3^m.$$

$$\text{D'où } F = 6^m.$$

SURFACE D'UN QUADRILATÈRE.

La surface d'un quadrilatère irrégulier pourra se mesurer très facilement. En effet, nous pourrions toujours, au moyen d'une diagonale, décomposer le quadrilatère donné en deux triangles, mesurer séparément la surface de chacun d'eux, et additionner les résultats. La longueur ainsi obtenue sera proportionnelle à la surface du quadrilatère.

Prenons (Pl. I, fig. 9) le quadrilatère $oqpr$, tirons la diagonale op et portons sur cette diagonale $sp = 2a$. En appliquant la construction décrite ci-dessus, nous trouverons pour le triangle opq la longueur f_1 et f_2 pour le triangle opr . La somme des deux, $f = f_1 + f_2$, représentera la surface du quadrilatère $oqpr$ réduite à la base a .

Nous avons pris (Pl. I, fig. 9) $a = 2$ et nous avons trouvé :

$$\text{Pour le triangle } opq : f_1 = 1,5.$$

$$\text{Pour le triangle } opr : f_2 = 1,87.$$

La somme des deux sera :

$$f_1 + f_2 = 1,5 + 1,87 = 3,37 \text{ unités.}$$

La surface du quadrilatère :

$$F = (f_1 + f_2) a = 3,37 \cdot 2 = 6,74 \text{ unités de surface.}$$

La diagonale op est-elle plus grande que le double de la base a , alors les points extrêmes s et t de f_1 et de f_2 tombent en dehors de la surface du quadrilatère (Pl. I, fig. 10).

La même méthode est encore applicable et nous aurons également :

$$f = (f_1 + f_2) = \frac{F}{a}.$$

Dans l'exemple traité (Pl. I, fig. 10), nous avons de nouveau pris comme base de réduction $a = 2$ et nous avons construit :

$$\begin{aligned} f_1 &= 2,4; \quad f_2 = 3 \\ f &= f_1 + f_2 = 5,4. \end{aligned}$$

D'où la surface du quadrilatère :

$$F = (f_1 + f_2) a = (2,4 + 3) 2 = 10,8 \text{ unités de surface.}$$

SURFACE D'UN RECTANGLE.

La surface du rectangle représenté (Pl. I, fig. 11) est $F = or \cdot op$, c'est-à-dire égale à la base multipliée par la hauteur. Nous trouverons de suite la longueur proportionnelle f en appliquant la construction donnée plus haut.

Prenons par exemple l'angle otr dont les côtés représentent déjà les longueurs op et or ; portons $os = a$, menons la droite sp et par r menons une parallèle rt à la droite sp . La longueur $ot = f$ est le résultat cherché.

Dans l'exemple (Pl. I, fig. 11), nous avons pris $or = 4$ et $op = 2,5$.

$$\text{D'où : } F = 2,5 \cdot 4 = 10 \text{ unités de surface.}$$

Dans la construction graphique nous avons pris $a = 2$ et nous avons construit $f = 5$.

La surface, rapportée à la grandeur f est donc :

$$F = a \cdot f = 5 \cdot 2 = 10 \text{ unités de surface.}$$

L'un des côtés du rectangle se trouve-t-il précisément égal à la

base de réduction, l'autre côté représentera directement la longueur proportionnelle à la surface du rectangle.

Nous pourrons, en appliquant cette même méthode, déterminer la surface d'un carré.

SURFACE D'UN PARALLÉLOGRAMME.

La surface d'un parallélogramme (Pl. II, fig. 12) est :

$$F = m \cdot op$$

c'est-à-dire égale à l'un des côtés multiplié par la normale comprise entre les deux côtés parallèles. Pour construire la longueur représentative de cette surface $f = \frac{F}{a} = \frac{op \cdot m}{a}$, nous nous servirons de l'angle opr . Portons sur le côté or la longueur m jusqu'en M ainsi que la base de réduction a jusqu'en A. Joignons les points A et p , menons par M une parallèle MX à la droite Ap; la longueur $oX = f$ est le résultat cherché.

Dans l'exemple traité (Pl. II, fig. 12), la distance des côtés parallèles est $m = 1,5$ et la longueur d'un de ces côtés: $op = 4$.

La surface est par suite :

$$F = op \cdot m = 4 \cdot 1,5 = 6 \text{ unités de surface.}$$

Pour mesurer graphiquement cette même surface, nous avons pris $a = 2$. Le résultat sera : $f = 3$. Et la surface $F = af = 2 \cdot 3 = 6$ unités.

Nous pourrons déterminer de même la surface d'un losange.

SURFACE D'UN TRAPÈZE.

La surface d'un trapèze est égale au produit de la moyenne arithmétique des deux côtés parallèles par la perpendiculaire comprise entre ces deux côtés.

Nous avons alors (Pl. II, fig. 13).

$$F = st \cdot m \text{ et } f = \frac{F}{a} = \frac{st \cdot m}{a}.$$

Pour construire cette expression, nous pourrons employer l'angle str formé par la moyenne arithmétique et par le côté or . Portons sur le côté tr la longueur m jusqu'en M et la base de réduction a jusqu'en A. Appliquant la méthode donnée ci-dessus, nous trouverons :

$$f = tX.$$

Dans l'exemple traité (Pl. II, fig. 13) nous avons :

$$m = 2,5 \text{ et } st = 3.$$

La surface est donc :

$$F = m \cdot st = 2,5 \cdot 3 = 7,5 \text{ unités de surface.}$$

Pour construire graphiquement f , nous avons pris $a = 2$ et nous avons trouvé $f = 3,75$. F sera donc : $= a \cdot f = 2 \cdot 3,75 = 7,5$ unités de surface.

SURFACE D'UN POLYGONE.

La surface d'un polygone régulier s'obtient le plus facilement, en le décomposant en triangles égaux, c'est-à-dire en joignant tous les sommets du polygone au centre de figure. Dans ce cas, nous n'aurons alors qu'à construire la surface de l'un de ces triangles et à multiplier le résultat par le nombre de triangles pour obtenir la longueur proportionnelle représentant la surface de ce polygone.

Avons-nous au contraire à mesurer la surface d'un polygone irrégulier, il nous faudra alors le décomposer également en triangles et mesurer séparément la surface de chacun d'eux. La somme de tous les f ainsi déterminés nous donnera le résultat demandé. Dans ce cas, une autre construction nous conduira plus rapidement au but. Elle consiste à transformer la surface du polygone donné en un triangle de surface équivalente, que nous saurons mesurer.

Soit (Pl. II, fig, 14) le polygone $opqrstu$ dont nous voulons mesurer la surface.

Il faut transformer ce polygone en un triangle de surface équivalente. Pour cela, commençons par faire disparaître l'angle uts . Joignons le point s au point u , menons par t une parallèle à la droite su et prolongeons cette parallèle jusqu'à sa rencontre en v avec le prolongement du côté ou . Joignons ensuite le point v au point s . Le triangle sgt est égal au triangle ugv et par suite le nouveau polygone obtenu $opqrsv$ a une surface équivalente à celle du polygone donné.

L'égalité des triangles ombrés sgt et uvg résulte de l'égalité des triangles stu et vsu , qui ont même base et même hauteur.

Nous opérerons ensuite de même sur l'angle vsr . Joignons le

point r au point v , menons par le point s une parallèle à la ligne rv et joignons le point ainsi obtenu w au point r . Le nouveau côté rw remplacera les anciens côtés ut , ts et sr et nous obtiendrons ainsi un nouveau polygone $wrqpo$, dont la surface sera équivalente à celle du premier.

En continuant de la même manière, nous arriverons à remplacer successivement les côtés ut , ts , sr et rq par la droite qX . Les lignes, qui se coupent au point X , formant un angle trop aigu, nous ne pousserons pas plus loin la transformation et nous appliquerons la même méthode à l'autre côté du polygone en commençant par l'angle opq . En procédant ainsi nous arriverons finalement au tracé du triangle XqY équivalent en surface à celle du polygone donné.

Nous savons mesurer la surface de ce triangle et en prenant a comme base de réduction, nous trouverons en $f = ki$ la ligne représentant la surface du polygone donné $opqrstu$.

Dans l'exemple traité (Pl. II, fig. 14), nous lisons $f = 3,68$. Ayant pris comme base $a = 2$, la surface sera par suite :

$$F = a \cdot f = 2 \cdot 3,68 = 7,36 \text{ unités de surface.}$$

Les lignes, qui servent à la construction nuisant souvent à la clarté de la figure, peuvent être laissées de côté. C'est pourquoi nous n'avons pas tracé (Pl. II, fig. 15) les lignes su et tv ; nous avons simplement marqué le point v par un petit trait, sachant que ce point v joint au point s nous donne la ligne remplaçant les côtés ut et ts .

Pour la même raison nous n'avons point tracé les lignes vr , sw et rw et nous n'avons marqué que le point w . Il en est de même pour les points X et Y . Le triangle XYq donne le résultat cherché; sa surface est équivalente à celle du polygone donné $opqrstu$.

Nous pourrions opérer cette transformation en prenant comme point de départ n'importe quel sommet du polygone et en nous imposant de plus comme condition que l'un de ces sommets (par exemple le point r (Pl. II, Fig. 16) reste en même temps le sommet du triangle cherché.

SURFACE D'UN SEGMENT PARABOLIQUE.

La surface du segment parabolique représenté (Pl. II, fig. 17) nous est donnée par la formule

$$F = \frac{4}{3} yx \sin \alpha.$$

dans laquelle y représente la moitié de la corde sous-tendue et x la portion de l'axe compris dans le segment donné. La quantité $x \sin \alpha$ représentera alors la distance comprise entre la corde sous-tendue et la tangente parallèle rr .

Portons en os une longueur égale au tiers de cette distance; nous allons démontrer que la surface du triangle sqr est équivalente à la surface du segment parabolique.

La surface de ce segment est en effet égale à :

$$F = \frac{4}{3} yx \sin \alpha = 2y \frac{\left(x \sin \alpha + \frac{1}{3} x \sin \alpha\right)}{2} = \frac{rq \cdot sp}{2}$$

Mais la surface du triangle sqr est aussi représentée par l'expression $\frac{rq \cdot sp}{2}$, surface que nous saurons mesurer d'après les procédés indiqués ci-dessus. Appliquant donc la construction connue, nous trouverons facilement en $f = zz$ la longueur représentant la surface du triangle sqr ou bien encore celle du segment parabolique donné, ramenée à la base a .

Quant au point s nous pourrons le choisir, d'une façon tout arbitraire sur la droite uu , parallèle à rr , les triangles formés ainsi ayant tous même surface.

Dans l'exemple traité (Pl. II, fig. 17), nous avons :

$$y = 1,85 ; x \sin \alpha = 1,84.$$

D'où nous tirons :

$$F = \frac{4}{3} \cdot 1,85 \cdot 1,84 = 4,54 \text{ unités de surface.}$$

Si nous construisons graphiquement cette même surface, en prenant comme base $a = 2$, nous trouverons $f = 2,27$ et la surface du segment sera:

$$F = a f = 2 \cdot 2,27 = 4,54 \text{ unités de surface.}$$

Pour obtenir le résultat demandé, tout revient donc à construire la longueur f . Pour cela, nous déterminerons (Pl. II, fig. 18) la flèche op de la parabole, qui donne en même temps la distance de la corde rs et de la tangente parallèle rr ; nous porterons sur le prolongement de cette flèche $oq = \frac{1}{3}op$. Joignant alors le point q aux points r et s nous obtiendrons en qrs un triangle de surface équivalente à la surface du segment parabolique. Comme nous l'avons déjà mentionné, le point q , peut être pris arbitrairement sur la droite uu . Ainsi le triangle rst sera équivalent en surface au triangle rsq et par suite au segment parabolique.

Dans l'exemple (Pl. II, fig. 18), la droite rs est égale au double de la base de réduction a ; la hauteur pq du triangle rsq représentera donc immédiatement la grandeur cherchée f .

Nous avons :

$$a = 2; f = 3,33.$$

D'où la surface de segment parabolique :

$$F = f \cdot a = 2 \cdot 3,33 = 6,66 \text{ unités de surface.}$$

SURFACE D'UNE FIGURE LIMITÉE PAR UNE COURBE QUELCONQUE.

Soit à mesurer la surface représentée Pl. II, fig. 19, nous voulons trouver la grandeur f proportionnelle à cette surface.

Partageons cette surface en plusieurs parties au moyen des cordes op , pq et qr menées d'une façon arbitraire. Nous considérerons les segments ainsi obtenus comme des segments paraboliques, dont nous saurons mesurer les surfaces.

Les courbes op , pq et qr ne sont pas, il est vrai, des paraboles; nous les considérerons néanmoins comme telles parce que l'erreur ainsi commise sera beaucoup moindre qu'en faisant d'autres hypothèses, c'est-à-dire qu'en les considérant comme des cercles ou des ellipses. L'erreur commise sera en outre d'autant moins grande que nous aurons considéré un plus grand nombre de segments.

Commençons par transformer le segment opt . A cet effet, portons à partir du point v en vn une longueur égale à $\frac{4}{3}vt$, et menons par n une parallèle à la corde op ; le triangle opw ainsi ob-

tenu sera équivalent en surface au segment *opt*. Opérons de même sur le segment suivant ; portons sur une perpendiculaire à la corde de ce segment une longueur égale aux $\frac{4}{3}$ de la flèche, menons par *y* une parallèle *a* à la corde *pq* et prolongeons-la jusqu'au point *x*. La ligne, joignant le point *x* au point *q*, remplacera la courbe *pq*. Nous pourrons employer le même procédé dans la transformation du troisième segment en prolongeant la parallèle *mu* à la corde sous-tendue soit jusqu'à sa rencontre avec la ligne *qx*, soit encore jusqu'à sa rencontre avec la ligne *sr*. Cette dernière construction se trouve tracée (Pl. II, fig. 12). La droite *qu* remplacera alors la courbe *qr*. La surface donnée se trouve ainsi transformée en un polygone dont nous saurons mesurer la surface. Pour cela, nous transformerons ce polygone en un triangle *q II III* de surface équivalente, et nous trouverons en $f = gh$ le résultat cherché, c'est-à-dire la grandeur de la surface donnée ramenée à la base de réduction *a*.

Une autre méthode, que l'on peut également employer pour mesurer la surface d'une figure terminée par des courbes quelconques, se trouve indiquée Pl. II, fig. 20.

Cette méthode consiste à partager au moyen de cordes parallèles la surface donnée en un ou plusieurs segments paraboliques et en surfaces élémentaires analogues à des trapèzes.

En prenant dans chaque cas particulier une division convenable, nous pourrons, sans erreur sensible, considérer chaque élément de la courbe comme une ligne droite et par suite chaque surface élémentaire comme un trapèze. La surface de chacun de ces trapèzes est égale à la moyenne arithmétique des deux côtés parallèles multipliée par la perpendiculaire comprise entre eux. Si donc nous avons pris des divisions égales entre elles et de plus égales à la base *a*, les lignes pointillées (Pl. II, fig. 20), qui ne sont autre chose que les moyennes arithmétiques des bases de ces trapèzes, donneront directement les longueurs proportionnelles à la surface de chacun d'eux. Mais si nous prenons comme division un sous multiple *n* de la base de réduction *a*, les hauteurs

moyennes des trapèzes ainsi construits seront alors n fois trop grandes et devront être divisées par n pour donner le résultat en vraie valeur.

Dans l'exemple (Pl. II, fig. 20), nous avons partagé la surface donnée en 11 parties, dont la première peut être considérée comme un segment parabolique et les autres comme des trapèzes. Nous avons transformé le segment parabolique en un triangle srO . La droite f_1 nous donnera la mesure de la surface de ce triangle réduite à la base a .

Quant aux trapèzes, nous les avons formés en prenant comme division le quart de la base a ; les hauteurs moyennes de ces trapèzes devront donc être divisées par 4. Cette division se trouve faite (Pl. II, fig. 21). L'angle tOr est pris tel que rt est égal à $\frac{1}{4} Or$. Si donc nous portons sur la ligne Or les unes à la suite des autres les hauteurs moyennes des trapèzes $O2, O3, O4, \dots, O11$, et si par les points ainsi obtenus 2, 3, 4, 11, nous menons des parallèles à rt , chacune de ces parallèles donnera la longueur correspondante f , c'est-à-dire sera proportionnelle à la surface de chaque trapèze. La somme de toutes ces longueurs f sera le résultat cherché :

$$OP = f_2 + f_3 + \dots + f_{10} + f_{11} + f_1 = f.$$

c'est-à-dire la grandeur de la surface donnée ramenée à la base a .

Théoriquement parlant, le résultat de notre construction sera d'autant plus exact que nous aurons partagé la surface donnée en un plus grand nombre de surfaces élémentaires; nous ne pourrions toutefois dans nos constructions graphiques appliquer cette règle que dans une certaine limite.

Dans l'exemple traité (Pl. II, fig. 20), nous avons pris comme base de réduction $a = 2$ et nous avons construit (fig. 21) $f = 8,62$; la surface sera donc :

$$F = 2 \cdot 8,62 = 17,24 \text{ unités de surface.}$$

L'un des facteurs entrant dans l'expression de la surface se trouve-t-il précisément égal à la base de réduction, l'autre donnera directement la longueur proportionnelle cherchée. Donc, si la

largeur des trapèzes est égale à la base de réduction, la hauteur moyenne de chaque trapèze donnera directement la mesure de sa surface.

Il résulte de ce qui précède que nous saurons mesurer une surface quelconque en la divisant en un certain nombre de surfaces élémentaires.

Dans tous les exemples traités, nous avons conservé la même base de réduction $a = 2$; les droites représentant ces surfaces seront donc entre elles dans le même rapport que les surfaces données.

Représentation d'un volume par une ligne proportionnelle.

Un volume est une quantité du troisième degré; nous devons donc diviser un volume par une quantité du second degré, (le produit de deux longueurs) pour pouvoir le représenter par une droite proportionnelle.

Soit $K = lmn$ le volume d'un corps; en divisant cette expression par le produit de deux bases, prises d'une façon arbitraire a et b , et en désignant par k le résultat de cette division, nous pourrions poser l'équation suivante :

$$k = \frac{lmn}{ab} = \frac{l \cdot m}{a} \cdot \frac{n}{b}.$$

La quantité $\frac{lm}{a}$ représente le nombre d'unités contenues dans la surface lm ramenée à la base a . Soit f la droite proportionnelle à la surface lm , nous aurons alors :

$$k = f \frac{n}{b},$$

expression que nous saurons construire d'après les méthodes indiquées précédemment.

Soit (Pl. II. fig. 22 et 23) un parallélépipède représenté par deux de ses projections; son volume est à représenter par une longueur proportionnelle.

Pour cela, choisissons deux bases de réduction quelconques a

et b ; m, n et l étant les dimensions de ce parallépipède, son volume aura pour expression :

$$K = mln$$

et la longueur proportionnelle sera :

$$k = \frac{K}{ab} = \frac{mln}{ab}$$

Si nous posons $\frac{ln}{a} = f$ la valeur de k sera :

$$k = f \cdot \frac{m}{b}$$

Nous construirons tout d'abord la grandeur f , c'est-à-dire nous mesurerons la surface nl ou bien $rsNv$ en la réduisant à la base a . Pour cela soit l'angle rsN , dont le côté sr représente la grandeur l et le côté sN la longueur n . Portons en sA la base a , joignons les points N et A et par r menons une parallèle à cette droite. Cette parallèle coupera le côté sN au point X , et la grandeur cherchée f sera donnée par la droite sX .

Nous construirons, en nous servant du même angle, l'expression $k = f \frac{m}{b}$. A cet effet, nous porterons m et b sur le côté sr de l'angle rsN . Joignons le point X au point B et par M menons une parallèle à la ligne XB . Le point y ainsi trouvé déterminera la longueur sy ou la droite cherchée k . Cette longueur k multipliée par le produit des deux bases a et b , nous donnera le volume cherché :

$$K = k \cdot a \cdot b.$$

Dans l'exemple traité (Pl. II, fig. 22 et 23), nous avons :

$$m = 1,5 ; l = 3,0 ; n = 2,5$$

Le volume sera par suite :

$$K = m \cdot l \cdot n = 1,5 \cdot 3 \cdot 2,5 = 11,25 \text{ unités.}$$

Dans la construction graphique de ce même volume, nous avons pris $a = 2$ et $b = 2,5$; nous avons déterminé $f = \frac{ln}{a} = \frac{3 \cdot 2,5}{2} = 3,75$ ou autrement dit nous avons mesuré la surface $srNv$, ensuite nous avons construit :

$$k = f \frac{m}{b} = \frac{3,75 \cdot 1,5}{2,5} = 2,25$$

REPRÉSENTATION D'UN VOLUME PAR UNE LIGNE PROPORTIONNELLE 19

k est donc la droite proportionnelle représentant le volume du parallépipède réduit aux deux bases a et b . Exprimons maintenant le volume cherché au moyen de la longueur proportionnelle k , nous aurons :

$$K = k \cdot a \cdot b = 2,25 \cdot 2 \cdot 2,5 = 11,25 \text{ unités.}$$

Les longueurs k , a , b , sont-elles toutes exprimées en mètres, la grandeur K le sera en mètres cubes.

Appliquons la construction ci-dessus à l'exemple traité (Pl. II, fig. 24 et 25); soit à mesurer le volume engendré par la surface $opqr$ tournant autour de l'axe xx .

Le volume ainsi engendré est :

$$K = Fs$$

c'est-à-dire égal à la surface $opqr$ multiplié par le chemin s décrit par le centre de gravité s de la surface $opqr$.

Or nous avons :

$$F = mn$$

où m (Pl. II, fig. 24) représente la hauteur moyenne du trapèze $opqr$ et n la perpendiculaire comprise entre les deux côtés parallèles. Quant au chemin s , décrit par le centre de gravité s , il est indiqué dans la figure 25.

Nous pourrions poser comme ci-dessus :

$$K = mns \text{ et } k = \frac{mns}{ab} = \frac{mn}{b} \cdot \frac{s}{a}$$

Mais comme $f = \frac{mn}{b}$, il s'en suit :

$$k = f \frac{s}{a}$$

Au moyen de l'angle vOw , nous construirons : (Pl. II, fig. 26) l'expression $f = \frac{mn}{b}$.

Portons à cet effet en ON la longueur n , en OM la longueur m et en OB la base b , joignons les points N et B et menons par M une parallèle à NB . Le point X ainsi trouvé déterminera en $f = OX$ la longueur proportionnelle de la surface mn ramenée à la base a .

La droite f connue, nous construirons l'expression $k = f \frac{s}{a}$.

Pour cela portons en OS la longueur s et en OA la longueur a . Joignons les points S et A et par X menons une parallèle à la

droite SA. Cette parallèle déterminera le point y et nous aurons en $k = Oy$ la longueur proportionnelle représentant le volume cherché.

Dans l'exemple traité (Pl. II, fig. 24 et 25), les dimensions du volume engendré par la rotation de la surface $opqr$ sont les suivantes $m = 1,59$; $n = 2,43$; $s = 2,2$.

Le volume aura pour expression :

$$K = mns = 1,59 \cdot 2,43 \cdot 2,2 = 8,5 \text{ unités de volume.}$$

Construisons graphiquement ce volume et prenons $b = 2,5$ et $a = 2$, nous trouverons d'abord :

$$f = \frac{mn}{b} = \frac{1,59 \cdot 2,43}{2,5} = 1,55,$$

ensuite :

$$k = \frac{fs}{a} = \frac{1,55 \cdot 2,2}{2} = 1,7.$$

D'où le volume engendré :

$$K = k \cdot a \cdot b = 1,7 \cdot 2 \cdot 2,5 = 8,5 \text{ unités de volume.}$$

Si nous choisissons comme bases de réduction a et b deux des dimensions principales du corps dont nous voulons déterminer le volume, la troisième de ces dimensions nous donnera directement la longueur proportionnelle cherchée k .

Dans la mesure du volume du parallélipède et du corps de rotation, nous avons pris comme bases de réduction les mêmes grandeurs a et b , il s'en suit que ces deux volumes sont entre eux dans le même rapport que les longueurs déterminées k .

Les corps, dont le volume ne peut être défini analytiquement d'une manière simple, devront être transformés en volumes élémentaires au moyen d'une série de plans parallèles. Dans les constructions de ce genre, il sera toujours préférable de mener ces plans à égale distance. Nous mesurerons comme ci-dessus chacun de ces volumes élémentaires, et la somme de toutes les longueurs k représentera la longueur proportionnelle cherchée. Il sera à propos de prendre comme bases a et b ou bien des longueurs égales à la distance des plans parallèles, ou bien encore des multiples ou sous-multiples de cette distance.

Représentation d'autres expressions analytiques par des lignes proportionnelles.

MOMENT STATIQUE D'UNE FORCE.

On entend par moment statique d'une force pris par rapport à une droite, le produit de cette force par sa distance à la droite considérée. Cette droite s'appelle axe du moment. Le moment statique est alors une expression du second degré, et devra pour être représenté par une ligne proportionnelle, être divisé par une longueur.

La force étant exprimée en unités de poids, et son bras de levier en unités de longueur, nous pourrons donc exprimer la base de réduction soit en unités de poids, soit en unités de longueur. Dans le premier cas la longueur proportionnelle trouvée sera à lire en unités de longueur ; dans le second, en unités de poids.

Pour qu'un moment soit déterminé, il faut connaître non seulement la grandeur de ce moment, mais encore le sens de sa rotation. Une force engendrant un moment tend en effet à tourner autour de l'axe considéré soit de droite à gauche, soit de gauche à droite. Nous considérerons comme positive une rotation de gauche à droite, et comme négative une rotation de direction contraire. Le sens d'un moment peut se présenter graphiquement au moyen d'une flèche indicatrice.

Ainsi le moment de la force P (Pl. II, fig. 27), pris rapport à l'axe x , est donné en grandeur par l'expression Pr ; son sens est positif, la force P tendant à produire une rotation de gauche à droite autour de l'axe x comme l'indique le sens de la flèche.

Soit M le moment de la force P, pris rapport à l'axe x , il aura pour expression $M = Pr$.

Appelons a la base à laquelle nous voulons ramener ce moment, nous pourrons toujours trouver une longueur y telle que

$$y = \frac{M}{a} = \frac{Pr}{a}.$$

Nous saurons construire cette expression d'après les procédés

connus ; toutefois nous n'en ferons pas ici la construction, devant traiter plus loin avec beaucoup de détails les procédés relatifs à la détermination des moments.

Si P est donné en kilogrammes et r en mètres, si la base de réduction a est aussi exprimée en mètres, y représentera des kilogrammes, et nous pourrons écrire :

$$y^{kil} = \frac{M^{m\ kil}}{a^m} = \frac{P^{kil} \cdot r^m}{a^m}$$

La même force P donnera un moment négatif $P r_1$ pris par rapport à l'axe x_1 , ou plus simplement par rapport au point x_1 , (l'axe x_1 étant supposé perpendiculaire au plan du tableau). Le sens dans lequel la force P tend à opérer une rotation est également indiqué par une flèche.

Dans l'exemple traité (Pl. II, fig. 27), nous avons fait $r = 1^m,5$ et $r_1 = 1^m,00$, si P est égal à 200^{kil} , le moment de cette force pris par rapport à x aura alors pour valeur :

$$M = + P^{kil} \cdot r^m = 200^{kil} \cdot 1^m,5 = + 300^m\ kil.$$

Le moment de la même force pris rapport à x_1 , aura pour expression :

$$M = - P^{kil} \cdot r_1^m = 200^{kil} \cdot 1^m,0 = - 200^m\ kil.$$

MOMENT D'UNE SURFACE.

Le moment d'une surface est la somme des produits de chaque élément dont se compose cette surface, par leur distance à l'axe de rotation. Nous rapporterons le moment d'une surface, comme tous les moments en général, à un axe de rotation.

Désignons ce moment par N , nous aurons alors :

$$N = \Sigma (fr).$$

où (Pl. II, fig. 28) f représente la surface de chaque élément de la surface F , et r leur distance à l'axe de rotation xx .

f étant du deuxième degré et r du premier ;

$N = \Sigma (fr)$ sera une expression du troisième degré.

Si donc nous voulons représenter N par une droite proportionnelle il nous faudra diviser cette expression par le produit de deux quantités du premier degré.

Le moment d'une surface peut aussi s'écrire :

$$N = \Sigma fr = Fs.$$

où F désigne la surface totale et s la distance de son centre de gravité à l'axe considéré xx .

L'expression du troisième degré $N = Fs$ pourra se construire comme plus haut.

Le moment d'une surface étant le produit de trois longueurs, en le divisant par une ligne a , base de réduction, nous aurons une expression du deuxième degré, c'est-à-dire une surface. Cette surface peut être réduite à son tour à une seconde base; le résultat de cette seconde opération donnera la longueur proportionnelle représentant le moment considéré. Les longueurs sont-elles données en mètres, et les bases adoptées sont-elles a et b , nous pourrons écrire l'expression suivante :

$$\frac{N^{m^3}}{a^m} = \frac{F^{m^2} s^m}{a^m} = (fs)^{m^2},$$

dans laquelle $f = \frac{F}{a}$.

De plus nous aurons :

$$\frac{(fs)^{m^2}}{b^m} = n^m.$$

D'où :

$$\frac{N}{ab} = \frac{Fs}{ab} = \frac{fs}{b} = n.$$

Où bien encore :

$$N = nab.$$

Pour trouver les moments des surfaces irrégulières, nous procéderons d'une manière analogue à celle employée pour la mesure du volume d'un corps irrégulier. Nous partagerons la surface totale en surfaces élémentaires; nous additionnerons tous les résultats et leur somme représentera le moment demandé.

MOMENT D'INERTIE DE SURFACES PLANES.

Le moment d'inertie est une expression analogue à celle du moment d'une surface; seulement au lieu de multiplier chaque élément par sa distance r à l'axe considéré, nous aurons à le multiplier par le carré de cette même distance.

Un moment d'inertie sera donc représenté par :

$$J = \Sigma (fx^2)$$

c'est-à-dire par la sommation de chaque élément multiplié par le carré de sa distance à l'axe considéré.

f et x^2 étant du second degré, J sera du quatrième. Pour représenter J par une longueur proportionnelle, il faudra donc le diviser par le produit de trois quantités du premier degré.

Soit i cette longueur proportionnelle, et a, b, c , les trois bases de réduction, nous pourrions poser :

$$i = \frac{J}{abc}$$

Le moment d'inertie étant une quantité du quatrième degré, nous choisirons comme unités le *mètre mètre cube* ou bien le *centimètre centimètre cube*, etc. De cette notation il suit que les facteurs entrant dans ce produit devront être eux aussi imprimés en mètres, centimètres, etc.

Divisons-nous un moment d'inertie J par une longueur, le résultat de l'opération représentera un volume. En divisant ce volume par une seconde base de réduction, nous trouverons une surface, que nous saurons représenter par une ligne proportionnelle en la réduisant à une troisième base. Cette dernière longueur déterminée sera donc proportionnelle au moment d'inertie. Si nous voulons avoir notre moment en unités métriques, il faudra exprimer les longueurs a, b, c en mètres, c'est ce que nous démontrent les équations suivantes :

$$\frac{Jm^3}{a^m} = Km^3$$

$$\frac{Jm^3}{a^m b^m} = \frac{Km^3}{b^m} = Fm^2$$

$$\frac{Jm^3}{a^m b^m c^m} = \frac{Fm^2}{c^m} = im$$

En multipliant i par les trois bases a, b, c , nous obtiendrons la valeur de J :

$$J = abci$$

La construction graphique de ces moments J sera traitée dans le courant de cet ouvrage.

Observations.

Si dans les constructions graphiques, nous avons à comparer entre elles diverses expressions, il nous faudra, pour obtenir des longueurs proportionnelles comparables, nous servir des mêmes bases. De plus, pour la commodité de l'opération, il faudra choisir ces bases ou bien encore le produit de plusieurs bases en chiffres ronds, par exemple 1, 10, 100, etc., de manière à lire de suite le résultat de chaque opération.

La grandeur des longueurs proportionnelles cherchées dépend du choix des bases, les résultats seront donc d'autant plus petits que les bases seront plus grandes et réciproquement. Afin d'obtenir les résultats demandés d'une manière aussi exacte que possible, il sera à propos de ne prendre comme bases des longueurs ni trop petites, ni trop grandes ; c'est pourquoi il faudra, dans chaque cas particulier, qu'il s'agisse de mesurer une surface, un volume, etc., apporter le plus grand soin dans le choix des bases.

La même observation s'applique également au choix des échelles.

Il faudra de plus s'arranger de façon à ne pas avoir des lignes se coupant sous des angles trop aigus, afin que la position de chaque point soit parfaitement déterminée et qu'il n'existe aucune ambiguïté.

ÉLÉMENTS DE LA STATIQUE GRAPHIQUE

Des forces en général et de leur résultante.

Les forces sont exprimées en unités de poids et leur grandeur peut être représentée par une longueur proportionnelle, donnant le nombre d'unités contenues dans chacune d'elles.

Dans une construction graphique, toutes les forces doivent être portées à la même échelle, que, pour cette raison, nous appellerons échelle des forces.

Pour qu'une force soit parfaitement déterminée, il faut, outre sa grandeur ou son intensité, connaître sa direction et sa position. Sur une seule et même ligne une force peut en effet agir dans deux directions différentes. Ainsi, par exemple, (Pl. III, fig. 29) sur la ligne xy , nous pourrions porter la même force soit de x vers y ou de y vers x . Cette force serait alors de sens différent, positive par exemple dans le premier cas, et négative dans le second. Nous représenterons la direction de chaque force au moyen d'une flèche.

Dans les constructions des charpentes, etc., nous ne rencontrons en général que des forces agissant dans un seul plan; aussi ne nous occuperons-nous, dans le courant de cet ouvrage, que des problèmes relatifs aux forces agissant dans un seul et même plan.

DE LA RÉSUŁTANTE DE DEUX FORCES DONT LES DIRECTIONS
SE COUPENT EN UN POINT.

Soient les deux forces P_1 et P_2 données en position par les deux lignes mm et nn et en intensité par les longueurs op et qr ; nous voulons déterminer la grandeur de leur résultante (Pl. III, fig. 30).

Portons (Pl. III, fig. 31) à partir d'un point o pris d'une façon arbitraire, la force $P_1 = op$ en grandeur et en direction, et soit oa la ligne représentant cette force. A partir du point a , portons avec son signe en ab la force $P_2 = qr$ sur une parallèle à sa position. Joignons le point o au point b , la ligne ob nous donnera la grandeur de la résultante R des deux forces P_1 et P_2 . Quant au sens dans lequel agit cette résultante, nous le trouverons facilement, sachant que la direction de la résultante est opposée à celle des deux forces P_1 et P_2 , comme nous l'avons indiqué sur l'épure. Nous obtiendrons cette résultante en position en menant une parallèle à la ligne ob par le point d'intersection c des deux directions des forces P_1 et P_2 . Le triangle oab , ainsi formé, s'appelle le triangle des forces.

Nous arriverons au même résultat en suivant un autre ordre, c'est-à-dire en portant tout d'abord la force P_2 et ensuite la force

P_1 . Si dans le triangle des force oab nous changeons le sens de la flèche de la résultante R , toutes les flèches auront alors même direction et dans ce cas R représentera la force faisant équilibre aux deux forces P_1 et P_2 et nous pourrons alors formuler la règle suivante :

« Si dans un triangle des forces, toutes les flèches ont la même direction, les trois forces sont en équilibre. »

Les deux forces ont-elles même direction, le triangle se réduit dans ce cas à une ligne droite et leur résultante est égale à la somme algébrique de ces deux forces, elle est de plus du même sens que les composantes.

Les deux forces sont-elles de directions contraires, alors la résultante est égale à la différence des deux composantes, et agit dans le même sens que la plus grande d'entre elles.

Dans l'exemple traité (Pl. III, fig. 30) nous avons pris :

$$P_1 = 32 \text{ tonnes}; P_2 = 25 \text{ tonnes},$$

la résultante de ces deux forces se trouve construite (fig. 31); elle a pour valeur :

$$R = 50 \text{ tonnes.}$$

L'échelle des forces employée dans toutes les figures de la Pl. III est de $0^m001 = 1$ tonne.

DE LA RÉSUULTANTE DE PLUSIEURS FORCES DONT LES DIRECTIONS SE COUPENT EN UN MÊME POINT.

La résultante de plusieurs forces, dont les directions se coupent en un même point, pourra se construire d'une manière analogue à celle employée dans le cas de deux forces concourantes.

Soit à chercher (Pl. III. Fig. 32) la résultante des cinq forces P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 , données en grandeur, en position et en direction. Nous porterons (Pl. III, fig. 33) à partir d'un point quelconque o les unes à la suite des autres et avec leurs signes les forces P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 , sur des parallèles aux positions données. La ligne joignant le point o pris comme origine au point e déterminé en dernier lieu, donnera en grandeur et en direction la résultante cherchée R , la résultante R est de direction opposée à celle des composantes.

Quant à la position de cette résultante, elle sera donnée par la parallèle menée par le point d'intersection s à la ligne oe . Le polygone $oabcde$ se nomme le polygone des forces.

En joignant chacun des sommets du polygone des forces au point o pris comme origine, nous obtiendrons les résultantes des forces comprises entre le sommet correspondant et le point origine. Ainsi la ligne ob représente la résultante des deux forces P_1 et P_2 . De même oc sera la résultante des forces P_1, P_2 et P_3 et od la résultante des forces P_1, P_2, P_3, P_4 et ainsi de suite.

Toutes ces lignes ou autrement dit tous les rayons partant du point o donneront donc en grandeur et en direction les résultantes partielles; donc le rayon oc représentera la résultante totale de toutes les forces considérées.

Quant à la position de ces résultantes partielles, nous l'obtiendrons également en menant par le point s des parallèles aux rayons du polygone des forces.

Si nous joignons entre eux deux sommets quelconques du polygone des forces, cette ligne représentera la résultante partielle des forces comprises entre ces deux sommets. Ainsi la ligne de jonction ac donne en grandeur et en direction la résultante des forces P_2 et P_3 , et la ligne ad la résultante des forces P_2, P_3, P_4 etc. Les flèches indicatrices de ces résultantes seront toujours opposées à celles des composantes. Pour avoir ces résultantes en position, nous n'aurons qu'à mener par le point s des parallèles aux rayons ac et ad .

L'ordre dans lequel s'effectue la composition des forces n'influe en rien sur le résultat. Quel que soit en effet la marche que nous suivions, nous trouverons toujours pour la résultante R la même grandeur et la même direction.

Il arrive quelquefois que dans une telle composition le point extrême de la dernière composante se confonde avec le point pris comme origine, ou autrement dit que le polygone des forces se ferme de lui-même. Dans ce cas la résultante est nulle, c'est-à-dire que les forces données se tiennent en équilibre. Les flèches ont

alors toutes la même direction et chaque composante, prise en sens contraire, peut être considérée comme la résultante de toutes les autres.

Dans l'exemple (Pl. III, fig. 32) les forces données sont :

$$P_1 = 25^t; P_2 = 18^t; P_3 = 15^t; P_4 = 16^t; P_5 = 24^t.$$

La résultante de ces cinq forces se trouve construite (fig. 33), elle est :

$$R = 29^t,8$$

et doit être mesurée à la même échelle à laquelle les forces données ont été portées.

DE LA RÉSUŁTANTE DES FORCES NE SE COUPANT PAS EN UN MÊME POINT.

Soit à déterminer (Pl. III, fig. 34) la résultante des forces 1, 2, 3, 4, 5. Toutes ces forces agissent dans le même plan, mais leurs directions ne se coupent pas en un seul et même point. Nous composerons d'abord les forces 1 et 2. A cet effet, nous porterons à partir d'un point origine o en oa la force 1, puis à partir du point a en ab la force 2. La ligne ob représentera la résultante des forces 1 et 2; sa direction est opposée à celle des composantes. Nous obtiendrons cette résultante en position en prolongeant la force 1 jusqu'à ce qu'elle coupe la force 2 et en menant par le point d'intersection α une parallèle à la ligne ob . Connaissant maintenant la résultante des forces 1 et 2 en grandeur, en direction et en position, nous pourrons considérer cette résultante comme une force donnée et la composer avec la force 3. Nous porterons alors dans le polygone des forces à partir du point b en bc la force 3; la ligne oc représentera la résultante des forces 1, 2 et 3. Cette résultante oc est de direction opposée à celle de ses composantes, elle a son point d'application en β déterminé par l'intersection de la ligne $\alpha\beta$ et de la force 3.

La résultante oc pourra être composée à son tour avec la force 4 en opérant comme nous venons de l'indiquer pour la résultante ob . La résultante des forces 1, 2, 3, 4 sera donnée en grandeur et en direction par la ligne od et en position par la ligne $\gamma\delta$. Nous répéterons la même construction jusqu'à ce que nous ayons enfin trouvé

la résultante des forces données 1,2,3,4,5. La ligne oe donnera en grandeur et en direction cette résultante totale ; quant à sa position elle sera donnée par la parallèle $\delta\varphi$ menée par le point δ au rayon oe .

La ligne brisée $1\alpha\beta\gamma\delta\varphi$ est ce que l'on appelle le polygone funiculaire des forces considérées 1,2,3,4,5. Chaque côté du polygone funiculaire représente donc la position de la résultante partielle des forces qui le précèdent. Quant à la grandeur de cette résultante, elle se trouve donnée dans le polygone des forces par la parallèle au côté correspondant du polygone funiculaire menée par le point o pris comme origine. La direction de cette résultante est également déterminée dans le polygone des forces, une résultante étant toujours de sens opposé à celui de ses composantes.

Les relations suivantes existent entre le polygone des forces et le polygone funiculaire. Chaque côté du polygone funiculaire est parallèle au rayon du polygone des forces joignant le pôle au point d'intersection des deux forces adjacentes au côté considéré. Ainsi la ligne $\beta\gamma$ est parallèle au rayon oc et la ligne $\gamma\delta$ au rayon od .

La ligne joignant deux sommets quelconques du polygone des forces donne en grandeur et en direction la résultante des forces comprises entre ces deux sommets. Ainsi, par exemple, la ligne bd représentera en grandeur et en direction la résultante des forces 3 et 4. Quant à son point d'application, nous le trouverons au point de rencontre ρ des deux côtés correspondants du polygone funiculaire prolongés.

De même la résultante des forces 3,4,5 sera déterminée en grandeur et en direction par la ligne be et son point d'application par le point d'intersection λ des deux côtés du polygone funiculaire $\alpha\beta$ et $\varphi\delta$ prolongés. En effet, cette résultante 3,4,5 doit passer par le point d'intersection γ de la résultante $R_{3,4}$ et de la force 5 : ce qui prouve l'exactitude de la construction indiquée. Si, au contraire, nous voulons déterminer la résultante d'un certain nombre de forces désignées dans le polygone funiculaire, nous n'aurons qu'à mener par le point o deux rayons parallèles

aux côtés correspondants du polygone funiculaire. La ligne, joignant les deux points ainsi obtenus, donnera en grandeur et en direction la résultante partielle cherchée. La résultante des forces 3,4,5 se trouve donc représentée en grandeur et en direction par la droite be interceptée dans le polygone des forces par les rayons ob et oe menés parallèlement aux côtés $\alpha\beta$ et $\delta\varphi$ du polygone funiculaire. Cette résultante agit, comme nous le savons déjà, au point de rencontre des côtés $\alpha\beta$ et $\delta\varphi$.

DE LA RÉSUŁTANTE DES FORCES PARALLÈLES.

Les forces parallèles sont de même sens.

Soit (Pl. III, fig. 36) à déterminer la résultante des forces 1,2,3,4,5,6 parallèles entre elles et dirigées dans le même sens.

Deux forces parallèles se coupant à l'infini, nous ne pourrions pas appliquer directement à la recherche de leur résultante la méthode donnée ci-dessus. Toutefois, en nous servant d'une force auxiliaire, qui ne soit point parallèle aux forces données, la construction du polygone funiculaire deviendra possible, et nous saurons déterminer la résultante des forces parallèles comme résultante partielle du système.

Prenons en effet une force auxiliaire P (Pl. III, fig. 36 et 37) et construisons comme ci-dessus le polygone des forces et le polygone funiculaire correspondant.

Portons à partir du point o pris comme origine en oa la force auxiliaire P en grandeur et en direction. Portons de même à partir du point a et les unes à la suite des autres les forces 1,2,3,4,5,6. Ces forces étant toutes parallèles tomberont sur une seule et même droite. Nous construirons le polygone funiculaire correspondant comme ci-dessus. A cet effet, nous prolongerons la force auxiliaire P jusqu'en son point de rencontre α avec la direction de la force 1 (Pl. III, fig. 36); par le même point α , menons une parallèle au rayon ob et prolongeons-la jusqu'à sa rencontre en β avec la direction de la force 2 et ainsi de suite jusqu'à ce que nous ayons mené $\eta\rho$ parallèle au rayon og . La résultante de toutes les forces compo-

Si le système est donnée en grandeur et en direction par la ligne de fermeture $og = P_1$ du polygone des forces, sa direction est de plus opposée à celle des composantes. Le polygone funiculaire ainsi construit est $\varphi\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\eta\rho$.

Si maintenant nous déterminons la résultante partielle des forces comprises entre les forces P et P_1 , nous obtiendrons la résultante demandée. Pour cela, nous prolongerons les côtés extrêmes $\alpha\varphi$ et $\rho\eta$ du polygone funiculaire jusqu'en leur point d'intersection λ . Ce point λ est, comme nous l'avons vu ci-dessus le point d'application de la résultante. Menant donc dans le polygone des forces des rayons parallèles aux côtés correspondants du polygone funiculaire $\varphi\alpha$ et $\rho\eta$, ces rayons intercepteront en ag la résultante cherchée en grandeur et en direction. Cette résultante sera égale à la somme algébrique des forces parallèles données 1,2,3,4,5,6.

Pour avoir la résultante dans sa vraie position, nous n'aurons qu'à mener par le point λ une parallèle à la ligne ag . Cette résultante $R = ag$ est de direction opposée à celle des forces composantes, elle agit donc de a vers g . Nous déterminerons de même la résultante partielle d'un certain nombre de forces ; par exemple des forces 2,3,4. Nous mènerons à cet effet dans le polygone des forces les rayons ob et oc parallèles aux côtés correspondants $\alpha\beta$ et $\delta\epsilon$ du polygone funiculaire. La grandeur be interceptée par ces rayons sur la ligne ag représentera en grandeur et en direction la résultante $R_{2,3,4}$. Quant à sa position, nous la trouverons en prolongeant les côtés du polygone funiculaire $\alpha\beta$ et $\delta\epsilon$ jusqu'à leur point de rencontre en τ et en menant par ce point τ une parallèle à la ligne be .

Ici encore les rayons du polygone des forces représentent les résultantes partielles des différents groupes considérés. Ainsi le rayon od donnera en grandeur et en direction la résultante des forces $P, 1, 2, 3$; le côté correspondant $\gamma\delta$ du polygone funiculaire déterminera la position de cette résultante.

Dans l'exemple traité (Pl. III, fig. 36 et 37), nous avons pris les forces suivantes :

$$1 = 12^t; 2 = 14^t; 3 = 8^t; 4 = 11^t; 5 = 10^t; 6 = 15^t.$$

La résultante construite sera :

$$R = ag = 70^t.$$

La résultante des forces 2, 3, 4 aura pour valeur :

$$R_{2,3,4} = eb = 33^t$$

Toutes les forces sont à mesurer à la même échelle.

Si nous faisons varier la grandeur de la force auxiliaire P, le polygone funiculaire variera avec cette force P, mais la résultante totale des forces parallèles, aussi bien que les résultantes partielles, ne changeront pas.

Dans presque tous nos calculs et constructions graphiques, toutes les forces parallèles sont en général verticales; aussi ne nous occuperons-nous dans le courant de cet ouvrage que des forces parallèles verticales.

De la résultante des forces parallèles et de directions opposées.

La composition des forces parallèles et de direction opposée s'opérera de la même manière que la composition des forces parallèles et de même direction. Nous porterons également toutes les forces sur une même verticale, en ayant soin toutefois d'observer la direction de chacune.

Pour déterminer (Pl. III. fig. 38) la résultante des forces parallèles 1, 2, 3, 4, 5, nous aurons encore recours à l'emploi d'une force auxiliaire non parallèle P. Nous porterons tout d'abord en *oa* la force auxiliaire P en grandeur et en direction. Nous porterons ensuite les forces parallèles sur la droite *ac* les unes à la suite des autres et en observant leurs directions. Ainsi nous porterons en *ab* et en *bc* les forces 1 et 2, puis en *cd* et en *de* les forces 3 et 4 et enfin en *ef* la force 5. Les forces 1, 2, 5 agissent dans le même sens, savoir du haut vers le bas; les forces 3, 4 au contraire agissent du bas vers le haut. Nous construirons le polygone funiculaire correspondant, comme nous l'avons fait plus haut en menant $\lambda\alpha$ parallèle à *oa*; $\alpha\beta$ à *ob*; $\beta\gamma$ à *oc*; $\gamma\delta$ à *od*; $\delta\epsilon$ à *oe*; $\epsilon\eta$ à *of*. Le po-

lygone funiculaire ainsi construit sera représenté par la ligne polygonale $\lambda\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\eta$.

La résultante de toutes les forces considérées est donnée en grandeur et en direction par le rayon of du polygone des forces et en position par le côté correspondant $\epsilon\eta$ du polygone funiculaire. Quant à la résultante des forces parallèles, elle se déterminera comme une résultante partielle du système. Elle sera donnée en position par la verticale passant par le point d'intersection ρ des côtés extrêmes du polygone funiculaire $\lambda\alpha$ et $\epsilon\eta$ prolongés; en grandeur et en direction dans le polygone des forces par la ligne af interceptée par les rayons oa et of parallèles aux côtés correspondants $\lambda\alpha$ et $\epsilon\eta$.

La manière dont chaque force est portée au polygone des forces, est identique à celle que nous avons employée dans l'addition des longueurs (Pl. I, fig. 4).

La résultante étant de sens opposé à celui des composantes, il s'en suit que sa flèche indicatrice sera dirigée du haut vers le bas, c'est-à-dire de a vers f .

Nous pourrions également déterminer d'après les méthodes connues chaque résultante partielle. Ainsi la force $R_{3,4}$ est la résultante des forces 3 et 4; elle passe par le point d'intersection ν des deux côtés du polygone funiculaire correspondants $\beta\gamma$ et $\delta\epsilon$ et est déterminée en grandeur et en direction dans le polygone des forces par la ligne ec , interceptée sur la verticale par les rayons oe et oc menés par le point o parallèlement aux côtés $\beta\gamma$ et $\delta\epsilon$.

Dans l'exemple traité (Pl. III fig. 38 et 39), nous avons pris les forces suivantes, celles agissant du bas vers le haut étant considérées comme négatives.

$$1 = 15^t; 2 = 17^t; 3 = -20^t; 4 = -19^t; 5 = 25^t.$$

La construction graphique nous a donné les résultats :

$$R = 18^t \text{ et } R_{3,4} = 39^t.$$

Les côtés extrêmes du polygone funiculaire se confondent-ils en une seule et même droite (Pl. III, fig. 41 et 42), la résultante des

forces parallèles considérées est alors nulle, c'est-à-dire que les forces données se tiennent en équilibre. Les rayons du polygone des forces qui déterminent dans ce cas la résultante en grandeur et en direction ne formant qu'un seul et même rayon, la résultante sera nulle. Le polygone des forces, qui, dans ce cas, se réduit à une droite, se ferme de lui-même, c'est-à-dire que si nous portons, à partir d'un point quelconque pris comme origine, toutes les forces données en grandeur et en direction, nous retomberons par la construction même au point origine.

Dans l'exemple (Pl. III, fig. 41 et 42), les forces 1, 2, 3, 4 sont en équilibre, le polygone des forces se ferme de lui-même et les côtés extrêmes $n\alpha$ et δu du polygone funiculaire construit d'après les règles indiquées ci-dessus tombent sur la même droite nu .

Nous avons en effet pris (Fig. 41 et 42) :

$$1 = -16^t; 2 = 18^t; 3 = 14^t; 4 = -16^t$$

La résultante de ces quatre forces est :

$$R = -16 + 18 + 14 - 16 = 0.$$

Quand les côtés extrêmes du polygone funiculaire ne forment pas une seule et même droite, mais sont parallèles, comme le cas se présente (Pl. III, fig. 44) pour les côtés $\eta\alpha$ et $\varepsilon\delta$, le polygone des forces ne s'en ferme pas moins de lui-même; les rayons menés par le point o parallèlement aux côtés du polygone funiculaire $\eta\alpha$ et $\varepsilon\delta$ se confondent et la résultante R est également nulle. Mais les forces 1, 2, 3, 4 ne sont pas en équilibre.

La résultante des forces parallèles considérées dans ce cas est alors un couple.

Par couple, nous entendons l'ensemble de deux forces parallèles égales entre elles, de sens opposé, et n'ayant pas la même position. Ainsi les forces P et P_1 (Pl. III, fig. 40) forment un couple.

Un couple ne se mesure point à l'intensité des forces qui le composent, mais à la grandeur de son moment.

Le moment d'un couple est égal au produit de l'une des forces par la perpendiculaire abaissée d'un point quelconque de cette

force sur l'autre. Ainsi (fig. 40) $M = Ps$ est le moment du couple PP_1 .

Le moment d'un couple pris par rapport à un point quelconque, situé en dedans ou en dehors des directions des forces P et P_1 , a toujours la même valeur (par point, nous entendrons aussi l'axe de rotation, perpendiculaire au plan des deux forces, dont la projection sera le point considéré).

Ainsi le moment du couple PP_1 , rapporté au point x est égal :

$$M_x = P_1(y + s) - Py = Ps.$$

Pour le point x_1 , il sera :

$$M_{x_1} = Pn + P_1m = P(m + n) = Ps.$$

Dans l'exemple traité (Fig. 40), nous avons pris :

$$P = P_1 = 15^t; s = 4^m7.$$

Le moment du couple sera pour le point x :

$$M_x = -P^t \cdot 2^m + P_1^t 3^m7 = P^t(-2 + 3,7) = P^t \cdot 1^m7.$$

Pour le point x_1 :

$$M_{x_1} = P^t \cdot 0,7 + P_1^t \cdot 1^m00 = P^t(0^m7 + 1^m00) = P^t \cdot 1^m7.$$

Le moment du couple considéré aura donc pour expression :

$$M = M_x = M_{x_1} = P^t \cdot s^m = 15^t \cdot 4^m7 = 25^m5$$

Comme nous l'avons vu, un couple engendre une rotation. Nous représenterons facilement l'action d'un couple en supposant chacune des forces P et P_1 , agissant aux extrémités d'un levier fixé en son point milieu, c'est-à-dire au pied de l'axe mené par ce point perpendiculairement au plan des deux forces (Pl. IV, fig. 45 et 46). La rotation peut se produire de gauche à droite et inversement (voir les flèches indicatrices des figures).

Dans le premier cas, le couple est positif ; dans le second il est négatif.

Un couple est donc, comme nous le voyons, déterminé par l'intensité des forces qui le composent, par la grandeur de son bras de levier, et par le sens de la rotation qu'il tend à produire.

Les couples constitués par des forces d'intensités différentes, mais ayant même moment et même signe auront par suite la même valeur et pourront être indifféremment substitués l'un à l'autre.

Ainsi les couples figurés (Pl. IV, fig. 47 et 48), ont même valeur ; ils ont en effet même moment $Pp = Kk$ et même signe.

Nous avons (fig. 47 et fig. 48) :

$$P' \cdot p^m = 2' \cdot 3^m = 6^m$$

$$K' \cdot k^m = 4' \cdot 1^m = 6^m.$$

Etant de même signe, ces couples ont même valeur. Un couple pourra donc être considéré comme donné par la grandeur de son moment ; à un seul et même moment correspondra un nombre infini de couples.

De l'énoncé ci-dessus, nous pouvons tirer une nouvelle définition du couple, définition qui se trouve très-souvent employée. Si les forces d'un couple diminuent toujours d'intensité, leur bras de levier devra par contre augmenter, puisque le moment doit conserver la même valeur. En laissant successivement décroître les forces, nous arriverons à la fin sur des forces infiniment petites, agissant à une distance infiniment grande, et nous pourrons définir le couple, le moment de deux forces infiniment petites situées à l'infini.

Si nous composons une force avec un couple, la résultante du système sera de nouveau la même force, elle aura de plus la même direction, mais sa position se trouvera déplacée dans le sens de la rotation (voir par exemple Pl. IV, fig. 49 et 50), où se trouve déterminée la résultante de la force R et du couple PP_1 .

Nous avons d'abord composé les forces P_1 et R , et puis leur résultante avec la force P . Le polygone des forces se trouve donc formé en portant la force P_1 en ab , puis la force R en bc et enfin la force P en cd , en observant le signe de chacune d'elles. La résultante R est donnée en grandeur et en direction par la ligne ad .

Pour trouver la direction de cette résultante, nous construirons le polygone funiculaire correspondant. A cet effet, nous prolongerons les forces R et P_1 jusqu'à ce qu'elles se coupent au point α ; par ce point α , nous mènerons une parallèle au rayon

ac et nous la prolongerons jusqu'à sa rencontre en β avec la force P . Par β nous mènerons enfin une parallèle au rayon ad ; et nous trouverons en $\beta\gamma$ la position cherchée de la résultante R .

Nous pourrions donc dire que sous l'influence du couple PP_1 , la force R se trouve transportée parallèlement à elle-même de sa position primitive $R\alpha$ à la position $\beta\gamma$. P étant égal et parallèle à P_1 , le polygone des forces sera dans ce cas un parallélogramme, les deux côtés $R\alpha$ et $\beta\gamma$ seront nécessairement parallèles entre eux.

La grandeur du déplacement dépend de l'intensité de la force R ainsi que de la valeur du moment du couple; le déplacement sera d'autant plus petit que la force aura une plus grande intensité; et il sera d'autant plus grand que le moment du couple sera plus grand. Quant à la grandeur de ce déplacement, elle pourra se mesurer au polygone funiculaire. Nous savons en effet que le moment des composantes, pris par rapport à un point quelconque situé dans leur plan, est égal au moment de leur résultante pris par rapport à ce même point. Pour plus de commodité, nous rapporterons les moments au point de rencontre α des deux forces R et P_1 ; le moment de ces deux forces sera alors nul, et nous pourrions poser l'équation :

$$Px + P_1 0 + R 0 = Ry$$

d'où la grandeur du déplacement :

$$y = \frac{Px}{R}$$

Cette grandeur est égale au moment du couple divisé par la force R .

Dans l'exemple traité (Pl. IV, fig. 49 et 50) nous avons pris :

$$R = 24^t; P_1 = P = 20^t; x = 2^m.$$

Le moment a pour valeur :

$$Px = -40^{mt}$$

Le déplacement :

$$y = \frac{Px}{R} = \frac{-40^{mt}}{24^t} = -1^{m666}.$$

Si maintenant nous nous reportons à la figure 44 de la pl. III, nous verrons que la résultante des forces 1,2,3,4 est un couple, et que, sous l'action de ce couple, la force P s'est trouvée transportée de sa position $\eta\alpha$ en une position parallèle $\delta\varepsilon$, c'est-à-dire que $\delta\varepsilon$ est la direction de la résultante des forces P 1,2,3,4.

Si nous déterminons par les constructions connues la résultante de toutes les forces parallèles, nous remarquerons que les côtés extrêmes du polygone funiculaire se coupent à l'infini et que les rayons menés parallèlement à ces côtés par le pôle o du polygone des forces donne comme résultante la valeur zéro.

Donc pour qu'il y ait équilibre entre les forces données, il ne suffit pas que le polygone des forces se ferme de lui-même, il faut encore que les côtés extrêmes du polygone funiculaire se confondent en une seule et même ligne droite.

Les mêmes conditions s'appliquent également aux résultantes partielles.

Dans l'exemple traité (Pl. III, fig. 43 et 44), nous avons pris les valeurs suivantes :

$$1 = 15'; 2 = -25'; 3 = 30'; 4 = -20'.$$

La construction nous fournit la valeur de la résultante:

$$R = 15 - 25 + 30 - 20 = 0.$$

Décomposition des forces en composantes

DÉCOMPOSITION D'UNE FORCE EN DEUX COMPOSANTES DE DIRECTIONS DONNÉES

Nous ne pourrions décomposer une force en deux composantes de directions données que si ces deux directions se coupent sur la force considérée; si cette condition ne se trouvait pas remplie, le problème serait indéterminé.

Soit (Pl. IV, fig. 51), la force R donnée en grandeur et en direction et en position, nous voulons déterminer la grandeur de ses composantes suivant les directions 1 et 2.

Pour cela, portons (Pl. IV, fig. 52) en ab la force R en grandeur et en direction, et par les points a et b , menons des parallèles aux directions données 1 et 2. Ces parallèles se coupent

en un point c ; bc représente la grandeur de la composante 2, et ac la grandeur de la composante 1, ce que l'on voit immédiatement dans le triangle des forces. Les composantes doivent être de sens opposé à celui de la résultante R , ce que nous indiquerons au moyen de flèches.

Nous arriverons au même résultat en suivant dans la décomposition l'ordre indiqué (Pl. IV, fig. 53), c'est-à-dire en menant par b une parallèle à 1 et par c une parallèle à 2. Ces parallèles se coupent en un point c_1 situé de l'autre côté de R et nous avons $ac' = 2$ et $bc' = 1$.

Si nous voulons déterminer les deux forces qui, agissant suivant les directions 1 et 2, font équilibre à la force donnée R , nous emploierons encore la même méthode, mais les flèches indicatrices des forces 1 et 2 courront dans le sens opposé. Cette construction se trouve indiquée (Pl. IV, fig. 54) où toutes les flèches courent dans le même sens dans le polygone des forces; les composantes $bc = 1$ et $ac = 2$ tiennent en équilibre la force R . De même 1 tiendra en équilibre 2 et R ; 2, 1 et R .

Dans l'exemple traité (Pl. IV fig. 51, 52, 53), nous avons pris $R = 25'$, et nous avons trouvé pour composantes :

$$1 = 44'; 2 = 39'5.$$

Dans la décomposition indiquée (fig. 54), les forces 1 et 2 ont les mêmes valeurs que ci-dessus, mais agissent dans le sens inverse.

La décomposition d'une force en plusieurs composantes, se coupant en un même point, n'est possible que si ces composantes, à l'exception de deux, sont données en grandeur et en direction. Dans tout autre cas, le problème est indéterminé. Ainsi, par exemple, il y a une infinité de forces qui, agissant suivant les directions 1, 2, 3, 4 (Pl. IV, fig. 55) donneront pour résultante la force R ; mais si deux de ces forces sont données en grandeur et en direction, le problème est alors parfaitement déterminé.

Soit (Pl. IV, fig. 55 et 56) à décomposer la force R suivant quatre directions 1, 2, 3, 4 se coupant en un même point o , les composantes 1 et 2 étant connues en grandeur et en direction.

Portons en ab la force R en grandeur et en direction, portons de plus en ad la composante 1 et en bc la composante 2, également en grandeur et en direction. Par les points c et d , menons des parallèles aux directions 3 et 4, par exemple par le point d une parallèle à 3 et par le point c une parallèle à 4. Ces parallèles se coupent en un point e ; les lignes de et ce nous donneront les composantes 3 et 4 en grandeur et en direction. Les flèches des composantes sont toutes de même sens, et opposées à celle de la résultante \vec{R} .

Dans l'exemple traité (Pl. IV, fig. 55 et 56), nous avons pris les valeurs suivantes :

$$R = 18'; 1 = 15'; 2 = 20'.$$

Si les deux composantes à déterminer ont mêmes directions, c'est-à-dire sont parallèles, nous pourrions alors en déterminer la grandeur au moyen d'un polygone funiculaire.

Soit donné (Pl. IV, fig. 57 et 58) la force $R = ab$, nous voulons en déterminer les composantes suivant les deux directions 1 et 2 parallèles à la force R . Prenons une force auxiliaire oa choisie d'une manière tout-à-fait arbitraire; menons $\alpha\beta$ parallèle à oa et $\beta\gamma$ parallèle à ob . Nous formerons ainsi le polygone funiculaire $\alpha\beta\gamma$.

Appliquons aux forces $R, 1, 2$ les conditions de l'équilibre.

Pour que ces forces soient en équilibre il faut que les côtés extrêmes du polygone funiculaire se confondent en une seule et même droite. Mais α et γ sont deux points de ces côtés extrêmes, la droite $\alpha\gamma$, sera donc la ligne finale du polygone funiculaire. Quant aux forces 1 et 2, nous les trouverons facilement dans le polygone des forces en menant par o une parallèle à $\alpha\gamma$; cette parallèle coupe la droite ab au point c . La force 1 sera déterminée par le rayon oc et par le rayon oa mené parallèlement à $\alpha\beta$; de même 2 sera comprise entre le rayon oc et le rayon ob parallèle à $\beta\gamma$. Les composantes 1 et 2 et la force R sont de directions opposées: ainsi, R agit de haut en bas; 1 et 2 aussi de haut en bas (suivre les flèches indicatrices du polygone des forces).

Dans l'exemple traité (Pl. IV fig. 57 et 58), nous avons pris $R = 24'$ et nous avons trouvé pour valeurs des composantes :

$$1 = 8' \text{ et } 2 = 16'.$$

DÉCOMPOSITION D'UNE FORCE EN TROIS COMPOSANTES DONT LES DIRECTIONS NE SE COUPENT PAS EN UN MÊME POINT

Une force peut toujours se décomposer suivant trois directions ne passant pas par le même point.

Soit par exemple (Pl. IV, fig. 59 et 60) la force donnée R à décomposer suivant les directions 1,2,3. Pour cela, déterminons le point d'intersection de la force R avec l'une quelconque des directions 1,2,3, par exemple avec la direction 1. Soit α ce point d'intersection ; joignons le point α au point d'intersection des deux droites 2 et 3 ; nous pourrons alors décomposer R suivant les droites $\alpha\beta$ et 1 ; ac représentera la composante X et bc la composante 1. Nous décomposerons ensuite la force X suivant les directions 2 et 3, et nous obtiendrons en cd et en ad les composantes 2 et 3. Toutes les composantes sont de sens opposé à celle de la résultante.

Dans l'exemple traité (Pl. IV, fig. 59 et 60) ; nous avons pris $R = 25'$ et nous nous sommes donné les trois directions des composantes 1,2,3 ; les valeurs de ces composantes déterminées graphiquement seront :

$$1 = 12'8 ; 2 = 20' ; 3 = 18'.$$

Des poutres.

Jusqu'à présent nous nous sommes occupés de la composition des forces d'une manière générale sans avoir égard à leur mode d'action.

Dans la suite nous traiterons spécialement des forces agissant sur les poutres.

Par poutres nous entendons toute construction destinée à franchir, à couvrir, à fermer un espace et capable de supporter, outre son poids propre, des charges accidentelles.

Une poutre peut être supportée en un, deux, trois ou en un plus grand nombre de points ; ces points s'appellent points d'appui. Nous classerons les différentes poutres suivant le nombre des

points d'appui et nous aurons alors les poutres reposant en un, deux, trois points, etc.

Nous avons représenté (Pl. IV, fig. 60) une poutre qui est encastrée à son extrémité ; (fig. 61), une poutre reposant en deux points ; (fig. 62), une poutre reposant en trois points et (fig. 64) une poutre reposant en quatre points.

Toutes les forces agissant sur une poutre étant en équilibre, nous pourrions diviser ces forces en deux groupes distincts. L'un de ces groupes comprendra les forces provenant du poids propre de la poutre et des surcharges accidentelles ; l'autre les réactions des points d'appui. Les forces composant le second groupe sont la conséquence immédiate de l'action des forces du premier. La direction des réactions dépend de la forme des surfaces de contact. Toutefois nous considérerons toujours les réactions comme normales aux surfaces de contact, c'est-à-dire que nous négligerons les effets du frottement, capable de produire une déviation dans la direction des réactions. La grandeur des réactions dépend aussi bien de la grandeur et de la direction des charges que de la forme de la poutre ; dans bien des cas, elle dépend encore de la nature du matériel employé. En vertu de l'équilibre, la résultante des réactions d'une poutre et la résultante des forces agissant sur cette poutre doivent être égales, agir au même point, et avoir des directions contraires.

Dans une poutre droite, les réactions sont verticales, dans une poutre courbe (arcs et ponts suspendus), elles sont inclinées.

Nous avons représenté (Pl. IV, fig. 60) une poutre droite reposant sur un point d'appui ; (fig. 61) une poutre reposant sur deux points d'appui. La figure 63 donne l'idée d'une poutre supportée en quatre points. Des poutres courbes reposant en deux et trois points d'appui sont indiquées (fig. 64 et fig. 62).

Les poutres droites ont en général un axe horizontal, ou tout au moins leurs points d'appui sur une même ligne horizontale. Dans certains cas, ces appuis sont à des niveaux différents (Pl. IV, fig. 65 et 66).

Dans cet ouvrage nous ne traiterons que des constructions et

calculs relatifs aux poutres reposant en un ou en deux points d'appui, et dont les éléments pourront être déterminées par les lois de la statique.

POUTRES REPOSANT EN SES DEUX EXTRÉMITÉS.

Les forces qui agissent sur une poutre sont de deux natures ; elles peuvent être concentrées, ou bien réparties. Par forces concentrées, nous comprenons celles qui agissent en certains points de la poutre ; par forces réparties, celles dont les points d'application se trouvent infiniment rapprochés l'un de l'autre. Ces dernières peuvent agir soit sur toute la longueur de la poutre, soit seulement sur une certaine partie de la portée ; elles peuvent de plus être réparties d'une manière uniforme ou variable. Si nous portons (Pl. V, fig. 74 et 76) en chaque point de la poutre une ordonnée proportionnelle à la force agissant en ce même point, nous obtiendrons une surface représentative de la charge répartie sur cette poutre. La surface ombrée (fig. 74) donne le cas d'une charge uniformément répartie ; celui d'une charge répartie d'une manière quelconque se trouve indiqué (fig. 76).

Nous ne considérerons tout d'abord dans ce qui va suivre, ni le mode de construction, ni la nature du matériel employé, ni le poids propre de la poutre, pour ne nous occuper que des forces agissant sur elle et des réactions engendrées en chaque point d'appui.

DÉTERMINATION DES RÉACTIONS.

Soient (Pl. IV, fig. 69) 1,2,3,4, quatre forces verticales agissant sur la poutre xy ; cherchons les réactions qui leur font équilibre. Pour cela, construisons d'après les procédés connus, le polygone des forces au moyen d'une force auxiliaire oa , ainsi que le polygone funiculaire correspondant (fig. 68 et 69). Nous savons que les réactions sont dirigées suivant les verticales passant par les points d'appui x et y ; nous savons de plus que ces réactions doivent être en équilibre avec les forces 1, 2, 3, 4 ; leur somme est donc représentée au polygone des forces par la grandeur ae . De ce qu'il y a équilibre, il s'en suit que les tangentes extrêmes

est

du polygone funiculaire sont dirigées suivant une seule et même droite. Ces tangentes extrêmes devant couper les tangentes voisines $\alpha\beta$ et $\eta\xi$ aux points d'intersection de ces dernières avec les verticales passant par les points d'appui, leur position se trouve donc être parfaitement déterminée, et leur direction est donnée par la droite $\alpha\xi$. Nous obtiendrons la grandeur de chacune des réactions en menant par le pôle o du polygone des forces des parallèles aux côtés du polygone funiculaire.

La réaction A se trouvera déterminée par les tangentes $\alpha\beta$ et $\alpha\xi$. Mais dans le polygone des forces, oa se trouve être une parallèle à $\alpha\beta$, il ne nous restera donc qu'à mener par le point o une parallèle à $\alpha\xi$. La droite af , interceptée par les rayons oa et of , donne la grandeur de la réaction A. Quant à sa direction, elle est directement opposée à celle des forces 1, 2, 3, 4. La réaction B se déterminera de la même manière et sera donnée par la droite ef . Le polygone des forces se trouve ici réduit à une droite; pour qu'il y ait équilibre, il faut que les flèches indicatrices suivent toujours la même direction; pour les réactions A et B, elles seront alors dirigées de bas en haut.

Nous trouverons, en appliquant les procédés connus, la résultante d'un nombre quelconque de forces. Ainsi nous obtiendrons la direction de la résultante $R_{1,2,3}$, des forces, 1, 2, 3 en menant une verticale par le point de rencontre v des côtés du polygone funiculaire $\alpha\beta$ et $\delta\eta$. Quant à la grandeur de cette résultante $R_{1,2,3}$, nous la trouverons dans le polygone des forces en menant par le pôle o des parallèles à $\alpha\beta$ et à $\delta\eta$, la ligne ad représentera donc cette résultante en grandeur.

C'est ainsi que nous avons trouvé (Pl. IV, fig. 69), en prenant 1 = 11 t; 2 = 9 t; 3 = 12 t; 4 = 8 t, les grandeurs des réactions A et B, et de la résultante $R_{1,2,3}$.

$$A = 21^t; B = 19^t; R_{1,2,3} = 32^t.$$

Nous pourrions aussi trouver très facilement la grandeur de ces mêmes réactions en nous basant sur l'équilibre de toutes les forces agissant sur la poutre. Nous savons en effet que la somme des moments de toutes ces forces pris par rapport au même point

doit être égale à zéro. Nous pourrions alors établir une équation dans laquelle A et B seules entreraient comme inconnues (les distances des points d'application des forces 1, 2, 3, 4 aux appuis x et y étant connues). Nous avons une équation à deux inconnues ; pour résoudre le problème, il nous faudrait poser une seconde condition ; mais en prenant les moments par rapport à l'un des points d'appui, par rapport à y par exemple, nous remarquons que le moment de la force B devient nul et par suite notre équation ne renfermera plus qu'une seule inconnue.

Nous pourrions poser l'équation suivante (fig. 69) rapportée au point y .

$$A.l - 1.l_1 - 2.l_2 - 3.l_3 - 4.l_4 = 0 ;$$

D'où :

$$A = \frac{1.l_1 + 2.l_2 + 3.l_3 + 4.l_4}{l}$$

Remplaçant les lettres par leurs valeurs, nous aurons :

$$A = \frac{11^t \cdot 5^m + 9^t \cdot 3^m,8 + 12^t \cdot 2^m,2 + 8^t \cdot 1^m,3}{6^m}$$

$$A = \frac{126^m t}{6^m} = 21^t.$$

Nous savons de plus que :

$$A + B = 1 + 2 + 3 + 4.$$

Nous aurons donc par suite :

$$B = 1 + 2 + 3 + 4 - A = 11^t + 9^t + 12^t + 8^t - 21 = 19^t.$$

Une autre manière de déterminer B consisterait à poser l'équation des moments de toutes les forces agissant sur la poutre, en les rapportant au point x . La réaction totale se compose des réactions partielles des différentes forces, déterminées comme si chacune d'elles agissait seule sur la poutre. L'équation précédente est applicable et les termes correspondants nous donneront la quantité pour laquelle chaque force entre dans la valeur de la réaction totale. Ainsi pour la force 2, cette quantité sera :

$$\frac{2.l}{l} = \frac{9^t \cdot 3^m 8}{6^m} = 5^t 7.$$

Si la force 2 agissait isolément, la réaction A serait alors égale à $5^t 7$.

Les charges se trouvent-elles placées ou symétriquement par rapport à l'axe de la poutre, ou bien encore uniformément réparties sur toute sa longueur, les réactions A et B sont alors égales

entre elles ; chacune a pour la valeur la demi-somme des forces agissant sur la poutre.

DES MOMENTS FLÉCHISSANTS ET DES EFFORTS TRANCHANTS DANS
UNE POUTRE REPOSANT EN SES DEUX EXTRÉMITÉS.

Supposons construits (Pl. V, fig. 70 et 71) le polygone des forces et le polygone funiculaire correspondants aux forces 1, 2, 3, 4. Si par le pôle o du polygone des forces nous menons une parallèle à $\alpha\zeta$, nous aurons de suite la grandeur des réactions $A = af$ et $B = fe$.

Au moyen de ces deux polygones, nous trouverons facilement la résultante d'un certain nombre de forces. Déterminons par exemple la résultante des forces A, 1, 2.

Pour cela coupons la poutre par un plan xx , qui partagera les forces agissant sur celle-ci, en deux groupes. Ces deux groupes de forces sont forcément en équilibre ; leurs résultantes seront alors égales mais de directions opposées. Nous pourrions considérer indifféremment l'un ou l'autre de ces groupes pour en déterminer la résultante.

Dans la suite de notre ouvrage (à moins d'une remarque toute spéciale), nous ne nous occuperons toujours que du groupe des forces situées à gauche de la section considérée.

Ceci posé, si par le pôle o du polygone des forces, nous menons des parallèles aux côtés correspondants $\alpha\zeta$ et $\gamma\delta$ du polygone funiculaire, nous obtiendrons en fc la grandeur de la résultante cherchée R_x . Nous trouverons un point de la position de cette résultante en prolongeant les côtés correspondants du polygone funiculaire $\alpha\zeta$ et $\gamma\delta$ jusqu'à leur rencontre au point m . Menant par ce point une verticale, nous aurons la position de R_x . Cette résultante est égale à la somme algébrique des forces A, 1, 2 ; A étant plus grand que 1 + 2, ce qui se voit clairement dans le polygone des forces, il s'ensuit que R_x agira de bas en haut.

Considérons une autre section de la poutre, par exemple x_1, x_1 , déterminons comme précédemment la résultante de toutes les

forces agissant à gauche de la section $x_1 x_1$. La grandeur de cette résultante sera donnée par la ligne fd ; mais son point d'application tombe à droite de la section considérée, ce qui tient à ce que le côté $\delta\eta$ du polygone funiculaire est incliné de gauche à droite. La ligne fd est égale à la somme algébrique des forces $A, 1, 2, 3$; or comme $A < 1 + 2 + 3$, il s'ensuit que R_{x_1} agira de haut en bas. Remarquons que pour trouver les résultantes correspondant aux différentes sections de la poutre, le côté du polygone funiculaire αz , côté que nous appellerons la ligne finale de ce polygone, est toujours à considérer avec l'autre côté du polygone funiculaire correspondant à la même section. Il s'en suit que si par le pôle du polygone des forces nous menons un rayon of parallèle à la ligne finale du polygone funiculaire, les diverses résultantes agiront de bas en haut tant que les autres rayons menés par le pôle o se trouveront au-dessus du rayon of ; et de haut en bas, dans le cas contraire. La résultante, ou autrement la force extérieure à la section considérée, tombera toujours en-dessus du rayon of , si les côtés correspondants du polygone funiculaire se coupent à gauche de la section considérée et inversement.

Nous pourrions donc établir la règle suivante :

La force extérieure à une section quelconque s'obtient en menant par le pôle du polygone des forces des parallèles aux côtés correspondants du polygone funiculaire ; elle est représentée en grandeur par le segment intercepté par ces parallèles sur la verticale où se trouvent portées les forces agissant sur la poutre, et est dirigée suivant la verticale passant par le point d'intersection des côtés du polygone funiculaire prolongés. Ce point d'intersection tombe-t-il à gauche de la section considérée, la résultante agit de bas en haut ; tombe-t-il au contraire à droite, elle agit en sens inverse.

Le moment statique d'une force pris par rapport à un point quelconque situé dans le plan de la poutre, par exemple par rapport au point X , se détermine ainsi qu'il suit. Menons par le point considéré une parallèle à cette force : prolongeons les côtés

du polygone funiculaire correspondant à cette force, 2 par exemple, jusqu'à leur rencontre avec cette parallèle. La grandeur ainsi interceptée sur cette parallèle $y_2 = rq$ est proportionnelle au moment cherché.

Nous obtiendrons la valeur de ce moment en multipliant la longueur y_2 par la distance polaire H du polygone des forces.

Le moment statique de la force 2 pris rapport au point X est alors :

$$M_2 = y_2 H.$$

En effet les triangles γrq et obc étant semblables, nous pourrions poser l'équation :

$$\frac{bc}{qr} = \frac{ou}{\gamma p} \text{ ou bien : } bc \cdot \gamma p = qr \cdot ou$$

Faisant dans cette équation $bc = 2$ et $\gamma p = l$, le moment de la force 2 par rapport à X devient :

$$(2) \cdot l = Hy_2.$$

La longueur H est la perpendiculaire abaissée du point o dans le triangle des forces (le polygone des forces se réduisant à un triangle dans le cas des forces parallèles). Ce n'est pas autre chose que la composante horizontale constante des forces représentées par les rayons du polygone des forces, c'est-à-dire des tensions du polygone funiculaire ; et pour cette raison, nous la désignerons sous le nom de *tension horizontale*.

La tension horizontale H entrant comme facteur dans l'expression du moment, il sera bon de choisir le pôle o , de telle façon que la grandeur H soit représentée par un nombre exact d'unités, par exemple 1, 2, 3, 4, 5, 10, 100, etc. (Cette mesure facilitera en effet beaucoup les lectures à faire sur les épures).

Un moment étant, comme nous l'avons vu, le produit d'une force par une longueur, il s'en suit que la tension horizontale H pourra représenter indistinctement soit une force, soit une longueur. Dans le premier cas, y sera à lire en unités de longueur, et dans le second, en unités de forces.

Lorsque la tension horizontale sera exprimée en unités de forces, nous la désignerons par la lettre H ; dans le cas contraire, nous la représenterons par la lettre h . La même remarque s'applique aux ordonnées Y et y .

Le moment d'une autre force, par exemple de la force 3, pris par rapport au point X ou par rapport à tout autre point de la verticale passant par X , a pour expression :

$$M_3 = ru. H = y_3. H.$$

La somme des moments des deux forces 2 et 3 sera donc pour le point X :

$$M_{2,3} = qu. H = (y_2 + y_3). H.$$

Nous saurons déterminer de même la somme des moments ou bien encore le moment de la résultante d'un nombre quelconque de forces extérieures à la section xx . Les côtés du polygone funiculaire à considérer seront l'un la ligne finale, et l'autre le second côté $v\delta$ rencontré par la section xx . Les deux côtés prolongés coupent sur la verticale passant par X la longueur tr et le moment correspondant a pour valeur :

$$M_x = tr. H = y_x H.$$

Pour la section $x_1 x_1$, le moment de la résultante R_{x_1} sera :

$$M_{x_1} = tu. H = y_{x_1} H.$$

La quantité y tombe-t-elle en dessous de la ligne finale du polygone funiculaire, le moment est positif ; dans le cas contraire il est négatif.

Les côtés du polygone funiculaire correspondant à une section quelconque, à la section xx par exemple, ne nous donnent pas seulement les grandeurs y_x proportionnelles au moment, ils déterminent de plus la position de la force R_x extérieure à la section considérée. L'ordonnée y est-elle comprise en dessous de la ligne finale du polygone funiculaire, la force extérieure doit alors avoir son point d'application situé à gauche du point X ; à droite, dans le cas contraire. Mais comme la position de cette résultante est

parfaitement déterminée, il s'en suit que le moment de cette dernière sera positif pour tout point pris à gauche et négatif pour tout point pris à droite.

Le point X tombe-t-il sur la section même, la même méthode est encore applicable à la détermination du moment de la force extérieure à cette section. Cherchons par exemple le moment de 1 par rapport à v . Pour cela, prolongeons les côtés du polygone funiculaire $\alpha\beta$ et $\beta\gamma$. Ces côtés coupent sur la verticale passant par v une longueur $y_1 = st_1$ et le moment cherché est :

$$M_1 = y_1 H.$$

De même nous trouverons le moment de la force extérieure à la section xx ; il a pour expression :

$$M_v = y_v H.$$

Les côtés du polygone funiculaire correspondants $\alpha\zeta$ et $\gamma\delta$ interceptent sur la verticale v le segment y_v . Si nous cherchons les valeurs des moments pour toutes les sections possibles, nous remarquons que les ordonnées y sont toutes interceptées par la ligne finale du polygone funiculaire et par l'autre côté correspondant à la section considérée. La surface comprise entre la ligne finale et les autres côtés du polygone funiculaire s'appellent pour cette raison *la surface représentative des moments*. Chaque ordonnée de cette surface représente en effet le moment de la force extérieure à chaque section ; aussi désignerons-nous ces ordonnées par le nom d'ordonnées représentatives des moments.

Dans une poutre reposant sur deux appuis, toutes ces ordonnées tombent en-dessous de la ligne finale du polygone funiculaire ; les moments seront donc de même signe et seront tous positifs.

Dans le cas de charges concentrées, le moment fléchissant a une valeur maxima qui correspond toujours à l'un des sommets du polygone funiculaire ; il est nul en chacun des points d'appui.

Dans l'exemple traité (fig. 70 et 71) nous avons conservé les valeurs données ci-dessus et nous avons trouvé les résultats suivants :

Pour le point X ou bien pour tout point de la verticale passant par X, le moment fléchissant dû à la force 2 est :

$$M_2 = y_2 \cdot H = qr \cdot H = 0^m,945 \cdot 20^t = 18^m90.$$

Le moment de la force 3 est :

$$M_3 = y_3 \cdot H = ru \cdot H = 3^m,44 \cdot 20^t = 68^m80.$$

D'où la somme des deux moments :

$$M_{2,3} = (y_2 + y_3) H = qu H = 4^m385 \cdot 20^t = 87^m70.$$

La somme des moments de toutes les forces agissant sur la section xx est :

$$M_x = y_x H = rt \cdot H = 0^m,823 \cdot 20^t = 16^m46.$$

La somme des moments de toutes les forces agissant sur la section x_1x_1 :

$$M_{x_1} = y_{x_1} \cdot H = tu \cdot H = 4^m26 \cdot 20^t = 85^m20.$$

Pour un point quelconque de la section xx menée par le point v de la poutre, le moment de la force 1 est :

$$M_1 = y_1 \cdot H = st' \cdot H = 0^m39 \cdot 20^t = 7^m80.$$

La somme de toutes les forces agissant sur cette section xx pris par rapport à un point quelconque de cette section est :

$$M_v = y_v \cdot H = ic \cdot H = 1^m,83 \cdot 20^t = 36^m6.$$

DES EFFORTS TRANCHANTS.

Par effort tranchant, nous entendons la composante de la force extérieure à une section quelconque agissant dans le plan même de cette section. Dans une poutre droite où toutes les forces sont verticales, cette composante ne différera donc pas de la résultante. L'effort tranchant tend à désagréger ou à cisailer les molécules du matériel constituant la poutre.

Si nous supposons déterminées pour toutes les sections d'une poutre les forces extérieures et si nous portons à partir d'un axe horizontal et sur la verticale correspondant à chacune d'elles la valeur de cette résultante, nous obtiendrons en joignant entre elles les extrémités de toutes ces ordonnées, la ligne représentant les variations des efforts tranchants, ou plus simplement la ligne des efforts tranchants.

Pour construire la ligne des efforts tranchants, nous prendrons (Pl. V, fig. 72) un axe horizontal quelconque ff' , sur lequel nous porterons la longueur de la poutre. Nous déterminerons ensuite

pour chaque section la grandeur de la résultante correspondante. A cet effet, nous considérerons tout d'abord une section infiniment rapprochée de A ; la seule force agissant sur cette section sera la force A, qui représentera l'effort tranchant dans la section considérée. Le polygone des forces nous donnant en af la grandeur de A, nous porterons cette valeur sur la perpendiculaire à l'axe ff passant par le point A. Nous aurons de plus soin de porter cette longueur fa au-dessus de l'axe ff , la force A agissant de bas en haut.

Si nous répétons cette construction et si nous cherchons l'effort tranchant correspondant à chaque section comprise entre les forces A et 1, nous trouverons pour toutes ces sections la même valeur comme effort tranchant, puisque nous ne rencontrerons aucune autre force entre A et 1.

L'effort tranchant entre A et 1 sera alors constant et sera représenté par une parallèle à l'axe ff menée par le point a .

Considérons maintenant une section entre 1 et 2, infiniment rapprochée de la force 1, menons dans le polygone des forces des rayons parallèles à la ligne finale et au côté $\beta\gamma$ du polygone funiculaire rencontrés par la section considérée ; la droite fb interceptée par ces rayons nous donnera la grandeur de la résultante cherchée. Cette résultante a pour valeur :

$$R = A - 1 = fa - ab = fb$$

elle agit de bas en haut, A étant plus grand que 1.

Pour toutes les sections comprises entre les forces 1 et 2, l'effort tranchant aura toujours la même intensité et sera représenté par une droite menée par le point b parallèlement à l'axe ff .

En appliquant la même construction, nous déterminerons facilement les ordonnées fc , fd , fe , correspondant aux sections infiniment voisines des forces 2, 3, 4 ; fd et fe , agissant de haut en bas devront être portés en dessous de l'axe ff . La force fe est égale à la réaction B, mais agit en sens inverse des précédentes.

Ainsi, comme nous pouvons le voir par ce qui précède, nous saurons construire directement la ligne des efforts tranchants au

moyen du polygone des forces en portant dans chaque section considérée la longueur déterminée dans le polygone des forces par les rayons parallèles à la ligne finale et au côté correspondant du polygone funiculaire. Les longueurs ainsi interceptées. $fa; fb; fc$ tombant en-dessus du rayon parallèle à la ligne finale du polygone funiculaire devront être portées en dessus de l'axe ff ; les autres fd et fe , par contre, en dessous.

Pour la section correspondante au point o l'effort tranchant est nul, c'est-à-dire qu'en passant par le point o l'effort tranchant change de signe et de positif devient négatif et inversement.

L'effort tranchant est nul au point o et atteint ses deux valeurs maxima sur les appuis. Si donc nous comparons les positions de ces maxima et de ce minimum avec celles des minima et du maximum des moments fléchissants, nous pourrions établir la règle suivante :

Dans une poutre reposant en ses deux extrémités, le moment fléchissant est maximum là où l'effort tranchant est nul et réciproquement.

Dans la recherche des efforts tranchants (Pl. V, fig. 72), la construction se trouve disposée de façon à pouvoir tracer les variations des efforts tranchants par une simple projection du polygone des forces.

Dans l'exemple traité (Pl. V fig. 70 et 71) nous aurons trouvé les résultats suivants :

$$\begin{aligned} fa &= A = 16^t88 \\ fb &= 12^t88 \\ fc &= 5^t88 \\ fd &= - 10^t12 \\ fe &= - B = - 25^t12. \end{aligned}$$

DES MOMENTS FLÉCHISSANTS ET DES EFFORTS TRANCHANTS SOUS
UNE CHARGE RÉPARTIE UNIFORMÉMENT OU D'UNE MANIÈRE
VARIABLE.

Charge répartie d'une manière variable.

Soit (Pl. V, fig. 76) une poutre reposant en ses deux points

extrêmes et soumise à l'action d'une charge proportionnelle à la surface ombrée. A chaque mètre carré de cette surface doit correspondre un poids de 10 tonnes. L'échelle des longueurs est de 0,010 par mètre.

Si nous mesurons cette surface en la réduisant à la base $a = 1^m,00$ la longueur proportionnelle exprimée en millimètres nous donnera le nombre des tonnes composant la charge entière.

Ne pouvant construire avec des forces infiniment rapprochées l'une de l'autre, nous partagerons la surface ombrée en plusieurs surfaces élémentaires, ou autrement dit, nous partagerons les forces en un certain nombre de groupes.

Divisons la surface ombrée en un certain nombre de surfaces élémentaires, par exemple en cinq.

En mesurant séparément chacun de ces éléments, nous obtiendrons la grandeur de la résultante des forces comprises dans chaque groupe. Ces résultantes agissent aux centres de gravité des éléments considérés : au moyen des forces ainsi déterminées 1, 2, 3, 4, 5, nous construirons le polygone des forces et le polygone funiculaire correspondant (Pl. V, fig. 75 et 76).

Le polygone funiculaire correspondant à une charge répartie sur toute la longueur de la poutre ayant un nombre infini de côtés, la surface des moments est alors limitée par une courbe. Le polygone funiculaire $\alpha\beta\gamma\delta\eta\epsilon\rho$ construit avec les forces 1, 2, 3, 4, 5 enveloppe donc une courbe dont les côtés $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$ etc., sont des tangentes. Quant aux points de tangence, ils se trouvent déterminés par la rencontre des côtés du polygone funiculaire avec les verticales de séparation de deux surfaces élémentaires considérées.

Joignant alors tous ces points de tangence par une courbe continue, nous obtiendrons la courbe des moments fléchissants $\alpha a b c d e \rho$ correspondant à la charge considérée.

Nous allons démontrer que le côté du polygone funiculaire $\beta\gamma$ est une tangente au point a à la courbe des moments fléchissants. En effet, les côtés infiniment petits du polygone funiculaire

a et α prolongés doivent se couper en un point de la force 1 considérée comme résultante des forces comprises entre α et a . De même les côtés infiniment petits du polygone funiculaire a et b doivent se couper en un point de la force 2 considérée comme résultante des forces comprises entre a et b . Mais les côtés du polygone funiculaire $\alpha\beta$ et $\beta\gamma$ ainsi que les côtés $\beta\gamma$ et $\gamma\delta$ se coupent également sur la direction des forces 1 et 2. De plus, d'après notre hypothèse, α , a et b sont aussi des points de la courbe des moments. Le côté $\beta\gamma$ doit se confondre avec le prolongement du côté infiniment petit du polygone funiculaire passant par le point a ; $\beta\gamma$ sera donc une tangente à la courbe avec a comme point de tangence.

La même démonstration s'appliquerait à tous les autres côtés du polygone funiculaire.

Plus nous considérerons de surfaces élémentaires et plus nous obtiendrons de points de la courbe des moments. Si nous joignons les points de rencontre α, ρ des côtés extrêmes du polygone funiculaire et des verticales passant par les points d'appui, nous aurons en $\alpha\rho$ la ligne finale du polygone funiculaire. Menons par le pôle o du polygone des forces une parallèle og à la ligne finale du polygone funiculaire $\alpha\rho$, cette parallèle déterminera en ga et gf les réactions des appuis A et B.

Pour trouver la position de la résultante des forces agissant sur une section considérée, nous opérerons comme précédemment. Nous prolongerons les côtés du polygone funiculaire correspondant à la section considérée, c'est à dire la ligne finale et la tangente jusqu'à leur point d'intersection. Ce point sera précisément un point de la position de la résultante cherchée. Ainsi la résultante des forces agissant sur la section xx passe par le point de rencontre m de la ligne finale du polygone funiculaire et de la tangente au point a . Ce point est parfaitement déterminé puisque, comme nous l'avons vu plus haut, la tangente au point a se confond avec le côté $\beta\gamma$ du polygone funiculaire construit avec les forces 1, 2, 3, 4, 5.

Quant à la grandeur de cette résultante, nous l'obtiendrons en menant par le pôle du polygone des forces des rayons parallèles aux côtés correspondants du polygone funiculaire. Pour la section considérée xx , la résultante sera donnée en grandeur et en direction par $bg = R_x$. Le procédé employé est en tous points identique à celui dont nous nous sommes servis dans le cas de charges concentrées ; mais au lieu de considérer ici les côtés du polygone funiculaire, nous devons opérer avec les tangentes à la courbe des moments.

Le moment fléchissant correspondant à un certain nombre de forces pourra se déterminer de la même manière que dans le cas de charges concentrées. La surface des moments se trouve ombrée sur l'épure.

Nous pourrions appliquer aussi nos principes connus à la recherche des efforts tranchants. Dans ce cas ils ne seront pas représentés par une surface étagée, mais par une surface limitée par une courbe continue.

En effet, pour construire la surface des efforts tranchants, il nous faudra considérer dans la poutre un nombre infini de sections ; mais, comme cela se trouve pratiquement impossible, nous nous contenterons de déterminer les efforts tranchants correspondant à un certain nombre d'entre elles, par exemple aux sections passant par les verticales de division. En chaque section considérée, nous porterons comme ordonnée à partir d'un axe horizontal la valeur de la force extérieure, nous joindrons par un trait continu les extrémités de ces ordonnées, et la courbe ainsi obtenue sera la courbe des efforts tranchants.

Pour une section infiniment rapprochée du point d'appui gauche, l'effort tranchant ne sera autre que la réaction même de cet appui.

Pour une section quelconque, pour la section x_1x_1 par exemple, nous déterminerons l'effort tranchant ainsi qu'il suit : nous mènerons par le point n la tangente tt à la courbe des moments, puis par le pôle o du polygone des forces un rayon op parallèle à

cette tangente ; la verticale gp comprise entre ce rayon op et le rayon og mené une fois pour toutes parallèlement à la ligne finale du polygone funiculaire, nous donnera l'effort tranchant cherché. La droite gp tombant en dessus du rayon og devra en gp se porter en dessus de l'axe gg .

Si nous faisons passer la section xx par la verticale séparant les deux surfaces élémentaires 1 et 2, nous remarquerons que la tangente à la courbe des moments se trouve déjà tracée, cette tangente concordant avec le côté $\beta\gamma$ du polygone funiculaire enveloppe construit en premier lieu. L'effort tranchant correspondant est gb .

Nous déterminerons de même la valeur des efforts tranchants pour toutes les autres sections jusqu'à ce que nous arrivions enfin à la réaction opposée B. La courbe joignant entre elles les extrémités des ordonnées ainsi déterminées sera la *courbe représentative des efforts tranchants*.

L'effort tranchant atteint ici de nouveau ses maxima sur les points d'appui de la poutre ; il est au contraire nul là où le moment fléchissant est maximum.

Si dans le polygone des forces nous portons à partir du point a la longueur as représentant toute la charge s'étendant du point d'appui à la section considérée x_2x_2 , nous pourrions déterminer la tangente à la courbe des moments passant par le point r . En effet la parallèle t_1t_1 menée par r au rayon os est la tangente cherchée.

Dans l'exemple traité (Pl. V, fig. 76), nous n'avons indiqué de la construction que ce qui avait rapport au premier élément 1, soit bz la largeur, et bi la hauteur moyenne du trapèze, soit $bv = 1^m$ la base de réduction choisie, la surface du trapèze représentera la force 1.

$$ab = 1 = 10^4.$$

La surface ombrée (fig. 76) a été partagée de telle manière que chacun des éléments pût être considéré comme un trapèze et mesuré comme tel.

C'est pourquoi les divisions se trouvent plus rapprochées là où la courbe a un plus petit rayon de courbure et inversement. En prenant ces divisions égales, la surface des éléments se mesurera plus facilement. Mais malgré la commodité qu'offre une pareille division, nous ne pourrions pas toujours

l'employer, n'étant pas libres de faire tomber les lignes de séparation là où bon nous semblera.

Dans l'exemple traité (Pl. V, fig. 75 et 76), les forces qui nous ont servi à construire le polygone funiculaire enveloppe sont :

$$1 = 10^t4; 2 = 8^t6; 3 = 8^t5; 4 = 7^t2; 5 = 6^t5.$$

Les valeurs des réactions construites graphiquement sont :

$$A = 20^t8 \quad B = 20^t4.$$

Le moment fléchissant total de toutes forces agissant sur la section x_3x_3 pris par rapport à un point quelconque de cette section sera :

$$M_{x_3} = y_{x_3}H = 0^m86 \cdot 20^t = 17^m2.$$

L'ordonnée maxima de la courbe des moments est $y_{\max} = 1^m48$.

Le moment fléchissant maximum aura donc pour valeur :

$$M_{\max} = y_{\max} H = 1^m48 \cdot 20^t = 29^m6.$$

Charge uniformément répartie.

La surface ombrée (Pl. V, fig. 74) représente une charge uniformément répartie.

Partageons cette surface en deux parties égales et remplaçons chacune d'elles par la résultante de toutes les forces qui la composent et agissant en son centre de gravité, soit $ab = 1$ et $bc = 2$.

Construisons (Pl. V, fig. 73) le polygone des forces 1 et 2 et (Pl. V, fig. 74) le polygone funiculaire $\alpha\gamma\delta\beta$.

Nous avons vu dans le cas précédent que, pour une charge répartie, les côtés du polygone funiculaire enveloppe sont des tangentes à la courbe des moments en leurs points de rencontre avec les verticales de division ; $\alpha\rho$, $\gamma\delta$, et $\rho\beta$ seront alors des tangentes à la courbe des moments aux points correspondants α, λ, β . Si maintenant nous répétons la même construction pour la partie gh , c'est-à-dire si nous la divisons à son tour en deux parties égales et si nous remplaçons chacune d'elle par la résultante P,P de toutes les forces qu'elle comprend et agissant en son centre de gravité, nous pourrons construire le polygone des forces $oadb$ et le polygone funiculaire $\alpha\eta\omega\lambda$ correspondant. Les points

$\alpha\gamma\lambda$ seront des points de la courbe des moments et les tangentes en ces points seront données par les lignes $\alpha\eta$, $\eta\omega$, et $\omega\lambda$.

Nous pourrions à nouveau appliquer la même construction à la partie gk et obtenir de nouvelles tangentes et de nouveaux points de tangence à la courbe des moments. Comme on peut le remarquer, chaque nouvelle tangente n'est autre que la ligne joignant les milieux des tangentes déjà connues. Ainsi la droite joignant les deux points milieux γ et δ des deux tangentes $\alpha\rho$ et $\beta\rho$ est une nouvelle tangente $\gamma\delta$ à la courbe cherchée. De même η et ω étant les points milieux des tangentes $\alpha\gamma$ et $\gamma\lambda$, leur ligne de jonction sera une nouvelle tangente $\eta\omega$.

Il suit de la construction des tangentes énoncée ci-dessus, que dans le cas d'une charge uniformément répartie le polygone funiculaire est une parabole. Nous saurons construire très-facilement cette parabole en connaissant simplement les deux tangentes extrêmes et nous n'aurons nullement besoin de partager la surface ombrée en plusieurs parties égales.

Joignons les points α et β ; le segment parabolique ombré représentera la surface des moments fléchissants dont le maximum correspondra au milieu de la poutre.

Dans l'exemple traité (Pl. V, fig. 74), la charge uniformément répartie se trouve représentée par un rectangle de $0^m,8$ de hauteur et de $6^m,0$ de longueur dont chaque mètre carré correspond à un poids de 10 tonnes (Dans tous les exemples qui suivront lorsqu'il s'agira de charges réparties, nous conserverons la même échelle, c'est-à-dire $1^m^2 = 1 \times 0^t$).

La charge par mètre courant de poutre sera alors $p = 8^t$. Les réactions sont égales entre elles, savoir : $A = B = 24^t$. La plus grande ordonnée ou bien l'ordonnée milieu de la courbe des moments a pour valeur :

$$y_{\max} = 1^m8.$$

Le moment correspondant sera :

$$M_{\max} = y_{\max} \cdot H = 1^m8,20^t = 36^m^t.$$

Le moyen le plus simple de construire la courbe des moments est le suivant :

Soit (Pl. V, fig. 79) une poutre reposant en ses deux extrémités et chargée uniformément d'un poids p par mètre courant. Por-

tons en ab dans le polygone des forces la charge totale (fig. 78). Si l est la distance des appuis, cette charge sera $ab = pl$. Prenons une tension horizontale quelconque H , remplaçons la charge totale par une seule force $ab = pl$ agissant au milieu de poutre et construisons le polygone funiculaire correspondant $\alpha\gamma\beta$. La courbe des moments étant une parabole nous pourrions la construire facilement au moyen du polygone $\alpha\gamma\beta$, $\alpha\gamma$ et $\gamma\beta$ étant des tangentes à la parabole des moments aux points α et β . Joignons les points milieux δ et η de ces tangentes, cette ligne $\delta\eta$ sera nouvelle tangente à la parabole. Quant à son point de tangence ρ nous l'obtiendrons en menant une verticale par le point de rencontre γ des deux tangentes $\alpha\gamma$ et $\beta\gamma$. Nous déterminerons de la même manière les points μ et ω et nous répèterons la même construction jusqu'à ce que nous ayons obtenu un nombre suffisant de points et de tangentes, qui nous permette de tracer la parabole avec facilité et exactitude.

Joignant alors α et β , le segment parabolique $\alpha\beta\rho$ représentera la surface des moments fléchissants.

Les réactions sont égales entre elles, savoir :

$$A = B = p \frac{l}{2}.$$

Si dans le polygone des forces nous avons pris le point o à égale distance des extrémités a et b , la ligne finale du polygone funiculaire serait alors horizontale ; ce cas se présente (Pl. V, fig. 74).

L'ordonnée maxima de la courbe des moments est-elle seule connue, la parabole se trouve déterminée. En effet, portons sur une verticale et à partir d'une ligne finale quelconque le double de cette ordonnée, joignons le point ainsi déterminé aux points d'intersection de la ligne finale et des verticales passant par les points d'appui. Les deux lignes ainsi obtenues sont des tangentes à la parabole en leurs points de rencontre avec la ligne finale du polygone funiculaire et nous pourrions appliquer la construction précédente.

Quant à la grandeur de cette ordonnée, nous saurons la déterminer facilement.

Considérons la section xx passant par le milieu de la poutre et déterminons le moment de toutes les forces situées à gauche de cette section. En divisant ce moment par la tension horizontale choisie, nous trouverons comme quotient la valeur de l'ordonnée cherchée.

Le moment pour la section xx est :

$$M_{\max} = y_{\max} H = A \frac{l}{2} - p \frac{l}{2} \frac{l}{4}$$

Mais la réaction A a pour valeur $A = p \frac{l}{2}$ et son moment est positif.

Quant à la résultante de la charge s'étendant sur la moitié de la poutre, elle est $p \frac{l}{2}$, son bras de levier est $\frac{l}{4}$ et son moment est négatif.

Nous pouvons écrire la relation :

$$M_{\max} = p \frac{l^2}{4} - p \frac{l^2}{8} = \frac{1}{8} pl^2 = y_{\max} H.$$

D'où l'ordonnée maxima :

$$y_{\max} = \frac{\frac{1}{8} pl^2}{H}$$

La formule $M_{\max} = \frac{1}{8} pl^2$ détermine alors le moment maximum dans le cas d'une charge uniformément répartie.

La résultante de toutes les forces agissant sur une section quelconque aussi bien que la somme des moments de toutes ces forces par rapport à un point quelconque de la section considérée se déterminera comme dans le cas de charges concentrées ; seulement, au lieu de nous servir des côtés du polygone funiculaire, nous devons opérer avec les tangentes à la courbe des moments.

Dans le cas d'une charge uniformément répartie, la ligne des

efforts tranchants est une droite (Pl. V, fig. 80) dont les points extrêmes sont donnés par la réaction des points d'appui. Cette droite coupe de plus l'axe en son point milieu. Donc dans une poutre reposant en ses deux extrémités et chargée uniformément, le moment fléchissant est maximum au milieu de la poutre, et l'effort tranchant nul.

Pour une section quelconque menée à une distance x de l'appui gauche, la résultante de toutes les forces agissant entre cette section et le point d'appui est :

$$Rx = A - px = \frac{pl}{2} - px,$$

ou bien encore en posant $Rx = y$,

$$y = -px + \frac{pl}{2}.$$

Cette formule est l'expression analytique d'une droite.

Dans le cas de charge uniformément répartie, les variations des efforts tranchants sont donc représentées par une droite.

Si dans cette formule, nous faisons $x = \frac{l}{2}$ il vient :

$$y = -\frac{pl}{2} + \frac{pl}{2} = 0.$$

Si nous faisons $x = 0$ ou $x = l$ il vient :

$$y = \frac{pl}{2},$$

$$y = -pl + \frac{pl}{2} = -\frac{pl}{2}.$$

L'effort tranchant est alors nul au milieu de la poutre, et égal aux réactions des appuis pour les sections menées par les verticales passant par les points d'appui.

L'angle, que forme la droite des efforts tranchants avec l'horizontale, dépend de la grandeur de p , c'est-à-dire de la charge par mètre courant.

Dans le cas d'une charge uniformément répartie, la courbe des moments fléchissants est une parabole ; celle des efforts tranchants une ligne droite.

Dans l'exemple traité (Pl. V, fig. 79), la charge uniformément répartie a été prise égale à $p = 6$ tonnes par mètre courant de poutre ; la longueur de la poutre étant de $l = 6^m 00$, les réactions des appuis seront :

$$A = B = \frac{pl}{2} = \frac{6^m 00 \cdot 6^m 00}{2} = 18^t.$$

L'ordonnée maxima de la courbe des moments fléchissants aura pour valeur :

$$y_{\max} = 1,35.$$

et le moment fléchissant maximum :

$$M_{\max} = y_{\max} \cdot H = 1^m 35 \cdot 20^t = 27^m t.$$

Si nous calculons cette valeur d'après la formule :

$$M_{\max} = \frac{1}{8} pl^2$$

nous trouverons :

$$M_{\max} = \frac{1}{8} 6^t \cdot 6,00^2 = \frac{216,00}{8} = 27^m t.$$

L'ordonnée maxima calculée analytiquement aura pour valeur :

$$y_{\max} = \frac{M_{\max}}{H} = \frac{27^m t}{20^t} = 1^m 35.$$

DES MOMENTS FLÉCHISSANTS ET DES EFFORTS TRANCHANTS DANS LE CAS DE SURCHARGE PARTIELLES UNIFORMÉMENT RÉPARTIES ET DANS LE CAS DE SURCHARGES MIXTES.

La poutre se trouve chargée uniformément mais seulement sur une partie de sa longueur.

Soit (Pl. VI, fig. 85) une poutre reposant en ses deux points extrêmes et soumise à l'influence de la surcharge partielle représentée par la surface ef .

Nous construirons la courbe des moments fléchissants comme dans le cas précédent, c'est-à-dire que nous remplacerons la surcharge partielle par sa résultante pl agissant au centre de gravité de la surface ef . Au moyen de cette force nous tracerons (fig. 84) le polygone des forces oab et (fig. 85) le polygone funiculaire correspondant $\delta\gamma\eta$. Projetons sur le polygone funiculaire les points extrêmes de la surcharge partielle. Nous savons qu'entre les points α et β le polygone funiculaire se trouvera rem-

placé par une parabole, la surcharge étant uniformément répartie; $\delta\gamma$ et $\gamma\eta$ seront des tangentes à cette parabole aux points α et β que nous pourrons tracer. La ligne des moments fléchissants est alors représentée par une droite $\delta\alpha$, puis par une parabole $\alpha\rho\beta$ et ensuite par une nouvelle droite $\beta\eta$. La ligne joignant les points δ et η est la ligne finale du polygone funiculaire. La courbe $\alpha\rho\beta$ représenterait la courbe des moments fléchissants d'une poutre uniformément chargée et de longueur ef .

La ligne des efforts tranchants est indiquée (Pl. VI, fig. 86). L'effort tranchant sur l'appui gauche est égal à la réaction de l'appui $A = ca$, il conserve cette valeur jusqu'au point e , aucune charge n'agissant entre ces deux points. Entre les points e et f , il sera représenté par une droite dont l'inclinaison sur l'horizontale dépend de l'intensité de la charge par mètre courant p . Entre le point f et l'appui droite l'effort tranchant sera donné de nouveau par une droite parallèle à l'axe oc et dont la distance à cet axe sera précisément égale à la grandeur de la réaction $B = cb$.

Dans l'exemple traité (Pl. VI, fig. 84, 85 et 86), nous avons également ombré les surfaces des moments fléchissants et des efforts tranchants. Les données sont les suivantes :

La portée de la poutre est de $12^m,00$, et sur une longueur $l = 7^m,00$ agit une charge uniformément répartie $p = 5$ tonnes par mètre courant.

La charge totale est $pl = 7^m,00 \cdot 5^t = 35^t$.

Les réactions sont $A = 19^t$; $B = 16^t$.

Le moment fléchissant est maximum dans la section où l'effort tranchant est nul, il a pour valeur :

$$M_{\max} = Y_{\max} \cdot h = 14^t75 \cdot 5^m = 73^m75.$$

La poutre est soumise à l'influence de différentes charges uniformément réparties.

Soit (Pl. VI, fig. 82) une poutre soumise à l'action de charges proportionnelles à la surface ombrée; nous voulons construire la ligne des moments fléchissants et celle des efforts tranchants.

Pour cela, nous remplacerons la surcharge comprise entre m et n par sa résultante G_1 , et celle comprise entre n et p par sa ré-

sultante G_2 , et nous construirons (Pl. VI, fig. 81 et 82) le polygone des forces et le polygone funiculaire correspondant. Ces charges étant uniformément réparties, la courbe des moments se composera de segments de parabole passant par les points α , ρ , δ obtenus en projetant les points m , n et p sur le contour polygonal $\alpha\beta\gamma\delta$. De plus $\alpha\beta$ et $\beta\rho$ sont des tangentes à la parabole correspondant à la surcharge mn et $\rho\gamma$ et $\gamma\delta$ des tangentes à la parabole correspondant à la surcharge np . Les deux tangentes $\beta\rho$ et $\rho\gamma$ se confondant en une seule droite, il s'en suit que les deux paraboles seront tangentes au point ρ . A l'aide des tangentes $\alpha\beta$ et $\beta\rho, \rho\gamma$ et $\gamma\delta$, nous construirons facilement les deux arcs de parabole. La droite $\alpha\delta$ sera la ligne finale du polygone funiculaire.

Quant à la ligne des efforts tranchants, elle est dans ce cas représentée par une ligne brisée, dont le côté le moins incliné sur l'horizontale correspond à la surcharge la plus petite. Pour construire cette ligne brisée, nous considérerons les sections passant par les points m , n , p et nous déterminerons les forces extérieures à chacune d'elles. Nous porterons avec leurs signes respectifs les résultantes ainsi trouvées à partir d'un axe horizontal dd sur les verticales passant par les points m , n , p . Les droites joignant les extrémités de ces ordonnées représenteront la ligne des efforts tranchants.

Ici encore le moment fléchissant atteindra son maximum, là où l'effort tranchant sera nul.

Dans l'exemple traité (Pl. VI, fig. 81, 82 et 83), les données sont les suivantes:

La poutre a une portée de $12^m,00$; elle se trouve chargée à raison de 4 tonnes et à raison de 6 tonnes par mètre courant de poutre.

La construction graphique des réactions donne :

$$A = 26^t; \text{ et } B = 31^t,9.$$

Le moment fléchissant maximum a pour valeur :

$$M_{\max} = Y_{\max} \cdot h = 17^t \cdot 5^m = 85^{\text{mt}}.$$

Le moment fléchissant de toutes les forces agissant sur la section xx , pris par rapport à un point quelconque de cette section, est :

$$M_x = Y_x \cdot h = 12^t,20 \cdot 5^m = 61^{\text{mt}}.$$

La poutre est soumise à l'action de surcharges concentrées et de surcharges réparties.

Lorsqu'une poutre (Pl. VI, fig. 88) sera soumise à l'action de surcharges concentrées et de surcharges réparties, nous emploierons la méthode suivante pour construire la ligne des moments fléchissants et celle des efforts tranchants. Nous partagerons les charges réparties en un certain nombre d'éléments et nous remplacerons chacun d'eux par sa résultante agissant en son centre de gravité. Si pour une section de la poutre une force concentrée vient s'ajouter à l'action d'un groupe de forces élémentaires, il nous faudra alors faire concorder la division avec la position de cette force concentrée. Nous prendrons par exemple un point de division q sur la force 3. Nous construirons le polygone des forces en les portant à la suite les unes des autres toutes les forces agissant sur la poutre et en suivant l'ordre dans lequel elles se présentent c'est-à-dire $G_1, 1, 2, G_2, 3, G_3$.

Nous choisirons la tension horizontale de ce polygone et construirons le polygone funiculaire correspondant $\alpha\beta\gamma\delta\eta\lambda\mu\omega$. Projetant ensuite les points de division de la charge répartie sur le polygone funiculaire, nous obtiendrons les points de tangence des différents segments de parabole, que nous pourrions construire au moyen des tangentes $\alpha\beta$ et $n\gamma, \delta\eta$ et $\eta\lambda, \lambda\mu$ et $\mu\omega$. Au point λ la parabole correspondant à la charge répartie pr se trouve interrompue sous l'action de la force concentrée 3.

Nous construirons la ligne des efforts tranchants en considérant toutes les sections menées par chaque point de division d'une charge répartie et par les verticales des forces 1, 2, etc., et en déterminant la force extérieure correspondant à chacune d'elles.

Nous porterons en ordonnées, chacune avec son signe, les valeurs trouvées pour ces résultantes; en joignant les extrémités de ces ordonnées par un contour polygonal, nous obtiendrons la ligne des efforts tranchants $caddeevcbhgfv$. Les lignes fg et hb , corres-

pendant à des charges égales et uniformément réparties, devront être parallèles. Dans le cas où la surcharge sera répartie d'une manière variable, les segments de parabole seront remplacés dans le polygone funiculaire par des courbes correspondant au mode de répartition. De même dans la ligne des efforts tranchants, les lignes droites seront également remplacées par des lignes courbes. Le mode de construction restera néanmoins en tous points identique à celui employé (Pl. V, fig. 76 et 77).

Dans l'exemple traité (Pl. VI, fig. 87, 88 et 89.) nous avons pris une poutre de 14^m de portée.

Sur 3^m de longueur, la charge est uniformément répartie et égale à $p_1 = 6^t$ par mètre courant, d'où $G_1 = 18^t$. Ensuite agissent les forces concentrées 1 = 10^t et 2 = 8^t. Puis sur 2^m,50 de longueur, la charge est uniformément répartie et égale à 4^t par mètre courant, d'où $G_2 = 10^t$; viennent enfin les forces 3 = 15^t et $G_3 = 10^t$. La charge totale de la poutre a pour valeur $ab = 71^t$.

Les valeurs des réactions construites graphiquement sont :

$$A = ac = 31^t,6 ; B = bc = 39^t,4.$$

Le moment fléchissant atteint son maximum au point où l'effort tranchant est nul, c'est-à-dire au point v . Il a pour expression :

$$M_{\max} = Y_{\max} \cdot h = 21^t,9 \cdot 5^m = 109^m,5.$$

Poutre supportée en une extrémité.

Une poutre supportée en un point ne peut pas être en équilibre sous l'influence seule de la réaction de son point d'appui, il faut une condition de plus, un moment d'encastrement. Une poutre supportée en un point ne produit pas alors seulement en ce point d'appui une réaction égale à la somme des forces agissant sur cette poutre, mais tend encore à tourner autour de ce point en vertu du moment engendré par ces forces elles-mêmes.

Soit (Pl. VI, fig. 91) une poutre reposant en un point d'appui et sur laquelle agissent les forces 1, 2, 3. Formons (fig. 90) le polygone des forces en portant en ad les unes à la suite des autres les forces 1, 2, 3, et construisons, au moyen d'une force auxiliaire P , le polygone funiculaire correspondant $\eta\alpha\beta\gamma\delta$, Au point δ agit la seule réaction possible, qui est égale à la somme de toutes les

forces agissant sur la poutre, mais agit en sens inverse. Cette réaction forme avec la résultante des forces 1, 2, 3, un couple, tendant à faire tourner la poutre autour de son point d'appui. Portons en da la réaction A et menons par le point δ une parallèle à oa , nous obtiendrons en $\delta\omega$ le côté extrême du polygone funiculaire, qui donne la direction de la résultante des forces $P, 1, 2, 3$. Cette résultante est égale à la force P , ce que l'on voit dans le polygone des forces. De plus, les côtés du polygone funiculaire $\delta\omega$ et $\eta\alpha$ étant parallèles, la résultante des forces 1, 2, 3, et la réaction de l'appui formeront un couple. Ce couple ne pourra être tenu en équilibre que par un couple de même intensité mais de sens inverse agissant également au point d'appui. Ce couple s'obtient généralement par l'encastrement de l'extrémité de la poutre.

La poutre (Pl. VI, fig. 91 a.) n'est pas encastree à son extrémité, mais se trouve fixée à la paroi au moyen de deux boulons. Ce mode de représentation donne une idée très-claire du moment nécessaire à l'équilibre. Dans ce cas l'équilibre est en effet la conséquence des tensions R, R , développées dans les boulons d'attache. Ces deux forces forment un couple positif d'intensité R_s , dont le moment doit être égal à celui du couple engendré par la résultante des forces 1, 2, 3, et la réaction A .

Revenons maintenant à la fig. 91 de la Pl. VI. Pour déterminer la résultante de toutes les forces agissant sur une section quelconque, nous appliquerons la méthode indiquée pour une poutre reposant en ses deux extrémités.

Ainsi la résultante R des forces agissant sur la section x_1x_1 sera donnée en grandeur et en direction dans le polygone des forces par les rayons parallèles aux côtés correspondants du polygone funiculaire $\eta\alpha$ et $\gamma\beta$. Quant à son point d'application, il se trouvera déterminé dans le polygone funiculaire par le point de rencontre des mêmes côtés $\eta\alpha$ et $\gamma\beta$.

Nous considérerons toujours les forces agissant entre la section considérée et l'extrémité libre de la poutre, la somme de ces

forces est en effet plus facile à établir que la somme des forces agissant de l'autre côté, puisque nous n'aurons à considérer que des forces parallèles, au lieu d'avoir à chercher la résultante de forces verticales et d'un couple.

Si nous considérons plusieurs sections et si nous cherchons les résultantes correspondantes, nous remarquerons que l'un des côtés déterminant la grandeur de ces résultantes est commun à toutes les sections, savoir le côté $\eta\alpha$.

La somme des moments de toutes les forces agissant sur la section x_1x_1 pris par rapport à un point quelconque de cette section, se détermine d'après la méthode générale connue. Pour cela, nous prolongerons les côtés correspondants du polygone funiculaire jusqu'à ce qu'ils coupent la verticale x_1x_1 . La grandeur ainsi interceptée Y_{x_1} est l'ordonnée cherchée et le moment fléchissant a pour valeur.

$$M_{x_1} = Y_{x_1} \cdot h.$$

Si nous cherchons les moments fléchissants correspondant à différentes sections, nous remarquerons que l'un des côtés du polygone funiculaire à prolonger est commun à toutes ces sections, savoir le côté $\eta\alpha$. Si alors nous prolongeons ce côté $\eta\alpha$ jusqu'en λ nous obtiendrons la ligne qui déterminera les ordonnées de tous les moments. Cette droite n'est autre que la ligne finale du polygone funiculaire.

La surface ombrée $\alpha\beta\gamma\delta\lambda$ est la surface des moments fléchissants produits dans une poutre encadrée à l'une de ses extrémités, sous l'action des forces 1, 2, 3. Ce moment est nul à l'extrémité libre de la poutre ; il atteint sa valeur maxima dans le plan d'encastrement.

Pour déterminer la valeur des efforts tranchants (Pl. VI, fig. 92), nous appliquerons les mêmes méthodes que celles indiquées par une poutre reposant en ses deux extrémités. Nous trouverons ainsi que l'effort tranchant entre 1 et 2 est constant et de plus égal à la force 1 = ab ; que l'effort tranchant entre 2 et 3 est constant et égal à la somme des forces 1 et 2, c'est à dire égal à

$1 + 2 = ac$ et ainsi de suite. L'effort tranchant dans le plan d'encastrement sera égal à la somme de toutes les forces considérées et atteindra en ce point sa valeur maxima :

$$A = ad = 1 + 2 + 3.$$

Dans l'exemple traité (Pl. VI, fig. 90, 91 et 92, nous avons construit graphiquement la ligne des moments fléchissants et celle des efforts tranchants.

Cette construction nous a donné les résultats suivants :

La résultante des forces situées à gauche de la section x_1x_1 a pour valeur $R_{1,2} = ac = 18^t$.

Le moment des forces agissant sur la section x_1x_1 , pris par rapport à un point quelconque situé sur la verticale passant par cette section. est :

$$M_{x_1} = Y_{x_1} \cdot h = 10^t,4 \cdot 5^m = 52^mt.$$

Quant au moment maximum, il a pour valeur ;

$$M_{\max} = Y_{\max} \cdot h = 35^t,6 \cdot 5^m = 178^mt.$$

L'effort tranchant maximum est égal à la somme de toutes les forces, ou bien encore à leur réaction ; il est :

$$A = ad = 30^t.$$

La poutre représentée (Pl. VII, fig. 94) est soumise à l'action de forces concentrées et de charges réparties. Pour construire la ligne des moments fléchissants et des efforts tranchants, nous partagerons ici encore, comme nous l'avons déjà fait (Pl. VI, fig. 88), les forces réparties en un certain nombre de groupes et nous les remplacerons par leurs résultantes G_1, G_2, G_3, G_4 . Nous formerons le polygone des forces en portant sur une même verticale toutes ces forces les unes à la suite des autres et dans l'ordre dans lequel elles se présenteront ; nous prendrons une tension horizontale h , et, au moyen de cette tension, nous construirons le polygone funiculaire correspondant $\alpha\beta\gamma\delta\eta\lambda\mu\nu\pi$. Ce contour polygonal sera tangent à la courbe des moments fléchissants aux points $m, \gamma, \eta, \mu, \pi$, et au moyen des tangentes $m\beta$ et $\beta\gamma$; $\gamma\delta$ et $\delta\eta$; $\eta\lambda$ et $\lambda\mu$; $\mu\nu$ et $\nu\pi$ nous pourrons construire les segments de parabole constituant cette courbe. En menant enfin la ligne finale $\alpha\rho$, et en la prolongeant jusqu'au point φ , nous obtiendrons la surface des moments fléchissants cherchée $\alpha\beta\gamma\delta\eta\lambda\mu\nu\pi\varphi$.

La ligne des efforts tranchants se construira d'après les procédés connus. Cette construction se trouve indiquée (Pl. VIII, fig. 95) mais à une échelle de moitié (la place faisant défaut sur l'épure). Le moyen le plus commode de prendre chaque fois la moitié des résultantes sera de mener dans le polygone des forces une verticale $a'b'$ à une distance $\frac{h}{2}$ du point o , et de mesurer directement toutes les forces sur cette verticale.

Dans l'exemple traité (Pl. VII, fig. 94) la poutre, encastree à une de ses extrémités a une longueur de 14^m. Les forces concentrées ont pour valeur :

$$1 = 0^t,5 ; 2 = 0^t,7 ; 3 = 0^t,5 ; 4 = 1^t,0.$$

Quant aux forces réparties, leurs valeurs au mètre courant sont les suivantes :

$$p_1 = 0^t,2 ; p_2 = 0^t,3.$$

et les résultantes des groupes considérés sont :

$$G_1 = 0^t,6 ; G_2 = 0^t,8 ; G_3 = 0^t,75 ; G_4 = 1^t,05.$$

L'ordre dans lequel les forces se trouvent placées, est :

$$1, G_1, 2, G_2, 3, G_3, 4, G_4.$$

La somme totale de toutes les charges concentrées et réparties agissant sur cette poutre, est :

$$A = 5^t,9.$$

Le moment de la résultante des forces comprises entre la section considérée xx et l'extrémité libre de la poutre a pour valeur :

$$M_x = Y_x \cdot h = 1^t,17 \cdot 10^m = 11^m t,7.$$

Le moment maximum fléchissant se produit dans le plan d'encastrement et est égal à :

$$M_{\max} = Y_{\max} \cdot h = 3^t,9 \cdot 10^m = 39^m t.$$

Quant à l'effort tranchant maximum, il a pour intensité :

$$A = 2 \cdot a' b' = a b = 5^t,9.$$

POUTRE REPOSANT EN DEUX POINTS D'APPUI INTERMÉDIAIRES.

Pour construire la ligne des moments fléchissants et la ligne des efforts tranchants dans les exemples traités (Pl. VII, fig. 97 et 100), nous emploierons les méthodes générales indi-

quées au chapitre de la poutre reposant en ses deux points extrêmes.

Soit (fig. 97) une poutre de longueur l reposant en ses deux points intermédiaires A et B et chargée d'un poids uniforme p par mètre courant. Nous formerons le polygone des forces (Pl. VII, fig. 96) en portant en ab sur une verticale la grandeur de la charge totale pl ; puis au moyen d'une tension horizontale h nous construirons (Pl. VII, fig. 97) le polygone funiculaire correspondant $\alpha\nu\beta$. La charge étant uniformément répartie, la courbe des moments sera une parabole.

Quant aux réactions, dont nous connaissons les directions et les points d'application, nous les déterminerons en grandeur par les lois de l'équilibre. Nous savons en effet que, pour qu'il y ait équilibre dans la poutre, il faut que le polygone des forces et le polygone funiculaire se ferment. Prolongeons les tangentes à la courbe des moments aux points α et β jusqu'en leurs points d'intersection δ et γ avec les verticales passant par les appuis A et B. Le polygone funiculaire devant se fermer, il s'en suit que les côtés extrêmes de ce polygone menés par les points δ et γ doivent n'en former qu'un seul, c'est-à-dire se confondre. La droite $\delta\gamma$ sera alors la ligne finale du polygone funiculaire et la surface des moments fléchissants sera représentée par la figure $\alpha\nu\beta\gamma\delta$. Nous obtiendrons les réactions en grandeur en menant dans le polygone des forces par le pôle o des rayons parallèles à la ligne finale $\delta\gamma$ et aux autres côtés du polygone funiculaire $\delta\alpha$ et $\gamma\beta$. Nous obtiendrons ainsi :

$$A = ac \text{ et } B = cb.$$

Dans la surface des moments, les ordonnées se trouvant en partie supérieures, en partie inférieures à la ligne finale du polygone funiculaire, les moments fléchissants seront donc en partie positifs, en partie négatifs.

Nous pourrions également construire d'après les méthodes connues, la somme des moments des forces agissant sur une section

quelconque. Ainsi le moment fléchissant correspondant à la section x_1x_1 est négatif et a pour valeur :

$$M_{x_1}^{mt} = - Y_{x_1}^t \cdot h^m.$$

Par contre, le moment fléchissant correspondant à la section x_2x_2 est positif et a pour expression :

$$M_{x_2}^{mt} = Y_2^t \cdot h^m.$$

Les moments fléchissants ont trois valeurs maxima, savoir aux points δ et γ pour les moments négatifs et à la section x_2x_2 pour les moments positifs. Il s'en suit qu'entre les points d'appui les moments fléchissants passent deux fois par la valeur zéro en changeant de signe.

Le cas peut aussi se présenter où tous les moments fléchissants seront de même signe et négatifs ; dans ce cas la ligne finale $\delta\gamma$ ne coupera point la parabole. Ce cas se présentera ou bien lorsque les points d'appui se trouveront plus rapprochés, ou bien lorsque les parties en porte à faux de la poutre supporteront des charges d'une plus grande intensité.

La résultante d'un certain nombre de forces se déterminera également en employant la méthode générale.

Ainsi, pour obtenir la résultante R_{x_1} de toutes les forces agissant sur la section x_1x_1 , nous n'aurons qu'à mener par le pôle o du polygone des forces des rayons parallèles aux côtés correspondants du polygone funiculaire, c'est-à-dire au côté $\delta\alpha$ et à la tangente au point σ . Les rayons ainsi menés en oa et od déterminent en grandeur et en direction la résultante $R_x = ad$. Quant au point d'application de cette résultante, il se trouve au point de rencontre ρ du côté $\alpha\delta$ et de la tangente ρt .

Pour construire la ligne des efforts tranchants (Pl. VII, fig. 98), nous considérerons d'abord les sections comprises entre α et x_1x_1 . Au point α l'effort tranchant est nul ; à partir de ce point, il croît uniformément et atteint en x_1x_1 la valeur déjà déterminée ci-dessus $R_{x_1} = ad$. Si nous portons comme ordonnées à partir d'un axe horizontal pris comme axe des abscisses et sur les verticales

correspondant aux sections considérées les valeurs trouvées pour les résultantes et si de plus nous joignons par une droite ad les extrémités de ces ordonnées, cette droite ad nous donnera les valeurs des efforts tranchants pour toutes les sections intermédiaires.

Considérons maintenant une section infiniment rapprochée et à droite de la section x_1x_1 . Pour cette section, l'effort tranchant sera donné en grandeur et en direction par la ligne dc interceptée par les rayons du polygone des forces menés par le point o parallèlement au côté $\delta\gamma$ et la tangente ρt du polygone funiculaire. Cette résultante tombant au-dessus du rayon oc parallèle à la ligne finale, elle devra être également portée au point c en cd au-dessus de l'axe considéré.

A la section x_1x_1 correspond un des moments fléchissants négatifs maxima, les efforts tranchants changeront donc de signe en ce point.

Menons maintenant une section infiniment rapprochée et à gauche du point B. Pour cette section, l'effort tranchant cherché se trouve donné en grandeur et en direction dans le polygone des forces par la droite cf interceptée par les rayons menés parallèlement au côté $\delta\gamma$ et à la tangente du point τ .

La droite cf tombant en dessous du rayon oc , il faudra alors porter fb en dessous de l'axe ab . La charge, qui agit sur la poutre étant uniformément répartie, la droite df limitera la surface des efforts tranchants. A la valeur du moment positif maximum correspond également un changement de signe dans les valeurs des efforts tranchants.

Considérons enfin une section infiniment rapprochée et à droite de B. Pour cette section, l'effort tranchant cherché est égal à fb dans le polygone des forces ; nous le porterons (fig. 98) de b en f . A l'extrémité de la poutre l'effort tranchant est nul, donc la droite fb représentera la variation des efforts tranchants pour cette partie de la poutre.

En τ , le moment fléchissant est négatif et de plus maximum ;

les efforts tranchants changeront de signe en passant par l'appui.

Si la poutre était supportée à ses deux extrémités, le polygone funiculaire serait représenté dans ce cas par la parabole $\alpha\nu\beta$ et sa ligne finale par la droite $\alpha\beta$. Si par contre les deux parties en porte à faux de la poutre faisaient défaut, $\sigma\tau$ serait la ligne finale du polygone funiculaire correspondant.

Il suit de ce qui précède que pour une poutre supportée en deux points intermédiaires, les ordonnées proportionnelles aux moments fléchissants sont de beaucoup plus faibles que dans une poutre de même longueur mais supportée en ses extrémités ; plus les points d'appui se rapprocheront et plus les ordonnées représentant les moments positifs diminueront. Pour une certaine distance des appuis le maximum de ces ordonnées positives deviendra zéro. Cette limite une fois passée, c'est-à-dire si l'écartement entre les appuis diminuait encore, il n'y aurait plus alors dans la poutre que des moments fléchissants négatifs. Si enfin les deux appuis se confondaient en un seul et même point, par exemple au milieu de la poutre dans le cas d'une surcharge uniformément répartie, la poutre pourrait alors être considérée comme formée de deux poutres distinctes reposant en un point d'appui.

Dans tous les problèmes relatifs à une poutre reposant en ses deux extrémités nous avons vu que les maxima des efforts tranchants se trouvaient être égaux en valeur absolue aux réactions des appuis. Pour une poutre reposant sur deux appuis intermédiaires, la somme des efforts tranchants à droite et à gauche des appuis, pris en valeur absolue, est aussi égale à la réaction des appuis. Ainsi (Pl. VI, fig. 98) nous avons :

$$\begin{aligned} ad + cd = dd = A ; \\ bf + cf + ff = B. \end{aligned}$$

Dans l'exemple traité (Pl. VII, fig. 97 et 98), la longueur de la poutre est $l = 17^m$, l'écartement des appuis 11^m , la distance de l'extrémité gauche de la poutre à l'appui gauche 4^m .

La charge par mètre courant est :

$$p = 0^t,3.$$

La construction a donné pour les réactions les valeurs suivantes :

$$A = 3^t,01 \text{ et } B = 2^t,09.$$

La résultante de toutes les forces agissant sur la section x_1x_1 est égale à $R_{x_1} = 1^t,2$.

Quant aux valeurs maxima des efforts tranchants, elles sont :

$$\text{Au point d'appui A : } ad = 1^t,2 ; cd = 1^t,81 ;$$

$$\text{Au point d'appui B : } fe = 1^t,49 ; fb = 0^t,6 ;$$

D'où les grandeurs des réactions :

$$A = ad + cd = 1^t,2 + 1^t,81 = 3^t,01 ;$$

$$B = fe + fb = 1^t,49 + 0^t,6 = 2^t,09.$$

Le moment négatif correspondant à la section x_1x_1 a pour valeur :

$$M_{x_1} = - Y_{x_1} \cdot h = - 0^t,48 \cdot 5^m = - 2^{mt},40$$

et le moment positif correspondant à la section x_2x_2 :

$$M_{x_2} = Y_{x_2} \cdot h = 0^t,61 \cdot 5^m = 3^{mt},05.$$

Soit (Pl. VII, fig. 100) une poutre reposant en une extrémité et en un point intermédiaire. Cette poutre se trouve soumise à l'action des charges concentrées 1, 2, 3, 4.

Pour construire la ligne des moments fléchissants, nous porterons dans le polygone des forces sur une verticale les unes à la suite des autres les forces 1, 2, 3, 4 ; puis, au moyen de la tension horizontale h , nous construirons le polygone funiculaire correspondant, sans avoir égard aux réactions des appuis. Le polygone funiculaire $\rho\alpha\beta\gamma\delta\eta$ une fois déterminé, nous prolongerons le côté $\alpha\rho$ parallèle au rayon oa jusqu'en son point de rencontre ν avec la direction de la réaction A. La ligne joignant les points ν et η sera la ligne finale de la surface des moments.

Les moments sont négatifs dans les sections voisines de l'appui gauche. Celui correspondant à la section x_1x_1 est négatif et a pour valeur :

$$M_{x_1} = - Y_{x_1} \cdot h ;$$

Celui correspondant à la section x_2x_2 :

$$M_{x_2} = Y_{x_2} \cdot h ;$$

et enfin celui correspondant à la section xx :

$$M_x = - Y_x \cdot h.$$

La partie $\alpha\nu\tau$ de la surface des moments [de même les parties $\alpha\delta\sigma$ et $\tau\beta\gamma$ (Pl. VII, fig. 97)] est analogue à la surface des moments agissant dans une poutre supportée en un point d'appui. Pour cette partie la ligne $\alpha\nu$ est à considérer comme ligne finale du polygone funiculaire. De même les lignes $\alpha\delta$ et $\gamma\beta$ (Pl. VII, fig. 97) seront les lignes finales des surfaces $\alpha\delta\sigma$ et $\beta\tau\gamma$.

Les efforts tranchants (Pl. VII, fig. 101) ont été construits comme dans le cas précédent. Pour toutes les sections considérées entre les forces 1 et 2, l'effort tranchant a une valeur constante et égale à $1 = ab$. Cet effort agissant du haut vers le bas devra se porter en ab en dessous de l'axe des abscisses. Il en sera de même pour l'effort tranchant $(1 + 2)$ correspondant aux sections menées entre 2 et A ; nous le porterons également en ac en dessous de l'axe af . Les efforts tranchants correspondant aux autres sections de la poutre se détermineront d'une manière analogue.

La surface ombrée (fig. 101) représentera les variations des efforts tranchants.

Aux points où le moment fléchissant atteint un maximum, soit positif, soit négatif, correspond un changement du signe (ici deux) dans la valeur des efforts tranchants.

Dans l'exemple indiqué (Pl. VII, fig. 100) la poutre considérée à 13^m de longueur, l'écartement des appuis est de 10^m et l'intensité des forces est ;

$$1 = 0^t,5 ; 2 = 0^t,3 ; 3 = 1^t,0 ; 4 = 1^t,0.$$

Nous trouverons la grandeur des réactions dans le polygone des forces en :

$$A = af = 2^t,1 \text{ et } B = fg = 0^t,7.$$

Ces mêmes valeurs mesurées dans la surface représentant les variations des efforts tranchants seront :

$$A = ac + fc = cc = 0^t,8 + 1^t,3 = 2^t,1.$$

$$B = fg = 0^t,7.$$

Le moment correspondant à la section x_2x_2 sera :

$$M_{x_2} = Y_{x_2} \cdot h = 0^t,56 \cdot 5^m = 2^{mt},80.$$

Ceux correspondant à la section x_1x_1 et xx sont négatifs et ont pour valeur :

$$M_{x_1} = -Y_{x_1} \cdot h = -0^t,39 \cdot 5^m = -1^{mt},95 ;$$

$$M_x = -Y_x \cdot h = -0^t,23 \cdot 5^m = -1^{mt},15.$$

La poutre figurée (Pl. VII, fig. 103) n'est pas seulement soumise à l'action des forces concentrées 1, 2, 3, mais encore à celle d'un moment négatif M_x , dans la section xx . Ce moment négatif peut être considéré comme engendré par une force horizontale agissant à l'extrémité d'un levier relié d'une manière invariable à l'extrémité B de la poutre. Le moment de cette force devra donc être égal au moment M_x , d'où $P_s = M_x$.

Pour déterminer la ligne des moments fléchissants, nous construirons (Pl. VII, fig. 102) le polygone des forces 1, 2, 3 et (fig. 103) le polygone funiculaire $\alpha\gamma\delta\eta\epsilon$.

Si ensuite nous portons sur la verticale passant par B l'ordonnée $\epsilon\beta$ du moment négatif et si nous joignons les points α, β , la droite $\alpha\beta$ sera la ligne finale du polygone funiculaire. La valeur de l'ordonnée $\epsilon\beta$ s'obtiendra en divisant la grandeur du moment M_x par la tension horizontale h du polygone des forces. Nous aurons en effet :

$$Y_x^t = \frac{-M_x^{mt}}{h^m}$$

Comme l'indique la surface ombrée (fig. 103), les moments fléchissants développés dans la poutre sont les uns positifs, les autres négatifs. Sous l'influence du moment M_x , la réaction B est plus grande que dans le cas où les forces 1, 2, 3 seules agiraient sur la poutre.

Les variations des efforts tranchants se trouvent indiquées (fig. 104) et ont été construites d'après la méthode générale. Il en est de même pour les réactions.

Dans l'exemple traité (fig. 103), la poutre a une longueur de 12 mètres, les forces concentrées ont pour intensité :

$$1 = 1^t; 2 = 2^t; 3 = 1^t.$$

La valeur du moment négatif $-M_x$ a été prise égale à :

$$M_x = -6^{mt} = -P_s = -4^t \cdot 1^m,5 = -6^{mt}.$$

La tension horizontale du polygone des forces étant $h = 5^m$, il s'en suit :

$$-Y_x^t = -\frac{M_x^{mt}}{h} = -\frac{6^{mt}}{5} = -1^t,2.$$

Les valeurs des réactions des appuis, construites graphiquement sont :

$$A = fa = 1^t,42 \text{ et } B = fd = 2^t,58.$$

Le moment fléchissant correspondant à la section x_1x_1 a pour expression :

$$M_{x_1} = Y_{x_1} = 1^t,1 \cdot 5^m = 5^m t,5.$$

Surcharge mobile.

Les constructions, telles que échafaudages, ponts, charpentes, etc... sont souvent soumises à l'action de surcharges mobiles. Un train lancé sur un pont de chemin de fer, une voiture passant sur un pont-route sont des exemples de telles surcharges. Aussi sera-t-il pour nous du plus grand intérêt de déterminer à quelles positions de la surcharge mobile correspondront dans une section considérée de la poutre les valeurs maxima du moment fléchissant et des efforts tranchants.

Soit par exemple (Pl. VIII, fig. 105) une poutre sur laquelle la charge Q peut se mouvoir d'une manière quelconque ; nous voulons déterminer pour quelle position de Q , le moment fléchissant sera maximum dans la section xx .

Supposons d'abord la charge Q placée à droite de la section considérée xx , le moment correspondant sera $M_x = Al$. A mesure que Q se rapproche de la section xx , la valeur de A croît et par suite celle du moment M_x . La force Q agit-elle directement au-dessus de la section considérée, le moment $M_x = Al$ a encore une plus grande intensité. Toutes les forces agissant sur une poutre sont en équilibre ; aussi le moment correspondant à cette dernière position de Q devra-t-il être égal à $M_x = -Bl_1$. La force Q se trouve-t-elle enfin placée à gauche de la section xx , par exemple à une distance y de celle-ci, le moment correspondant aura pour expression :

$$M_x = -B \cdot l, \text{ ou encore } M_x = Al - Qy,$$

Ce moment a une valeur plus petite que celle trouvée ci-dessus, la réaction B devenant de plus en plus petite à mesure que Q s'éloigne de cet appui B . Au moment où la force Q passe par l'une des verticales des points d'appui A ou B , le moment M_x est nul.

Nous pourrions donc dire que, dans le cas d'une charge mobile Q , le moment M_x atteint sa valeur maxima, lorsque la charge Q agit directement au-dessous de la section considérée. Il en sera de même pour toute autre section de la poutre. Les réactions et le moment fléchissant pour une section quelconque seront d'autant plus grands que la charge mobile Q aura une plus grande intensité.

Si, à l'action de la force Q vient s'ajouter celle d'une seconde force Q_1 , également placée à droite de la section considérée, (Pl. VIII, fig. 106), l'intensité de la réaction A et par suite celle du moment M_x croîtront. Il en sera de même pour une force Q_2 appliquée à gauche de la section. Ces forces Q_1 et Q_2 jouiront des mêmes propriétés que la force Q .

Nous pourrions donc des relations énoncées ci-dessus conclure que, pour une section quelconque, le moment fléchissant dû aux charges mobiles atteint sa valeur maxima :

1° Quand ces charges se trouvent rapprochées le plus possible de la section considérée ou bien encore placées directement au-dessus de cette section ;

2° Quand la plus grande ou les plus grandes de ces charges se trouvent rapprochées le plus possible de la section considérée, ou bien encore placées directement au-dessus de cette section.

3° Quand ces charges agiront en plus grand nombre sur la poutre.

Ces conditions ne sont toutefois pas toujours réalisables en même temps. Il en est ainsi quand les forces sont reliées entre elles, d'une manière invariable, ou bien quand leur mode de répartition est défini.

La charge mobile est-elle uniformément répartie, dans ce cas la troisième condition seule est applicable, c'est-à-dire que la surcharge devra s'étendre sur toute la longueur de la poutre. Quant à l'effort tranchant agissant dans la section xx (Pl. VIII, fig. 105), il est égal à la réaction A aussi longtemps que Q se trouvera placée à droite de cette section. Plus Q se rapprochera de xx , plus la réaction A croîtra et avec elle la valeur de l'effort tran-

chant ; la force Q agit-elle à gauche de la section xx , la réaction A augmentera encore, mais l'effort tranchant diminuera. La valeur de Q est en effet à retrancher de la valeur de la réaction, l'effort tranchant étant donné par l'expression $A - Q$, où Q est $> A$.

Nous pourrions donc dire que l'effort tranchant augmentera d'intensité à mesure que la force Q se rapprochera de la section considérée. Sa valeur sera maxima quand Q passera par la verticale de cette section.

Si à l'action de la force Q s'ajoute celle d'une seconde force Q_1 (Pl. VIII, fig, 106) placée également à droite de la section considérée, cette addition aura pour effet d'augmenter la réaction A et par suite la valeur de l'effort tranchant dans cette section. Il n'en sera pas de même de toute force Q_2 placée à gauche de xx . Car, tout en augmentant la valeur de la réaction A cette force développe dans la section xx un effort tranchant de signe contraire à celui produit par les forces Q et Q_1 . L'effort tranchant résultant sera donc dans ce cas égal à la différence de ces deux genres d'effort.

De là nous concluons que l'effort tranchant atteindra ses valeurs maxima positive et négative quand la surcharge (concentrée ou répartie) s'étendra sur la partie de la poutre située à droite ou à gauche de la section considérée. La valeur de ces efforts dépend du nombre de forces agissant sur la poutre, elle sera en outre d'autant plus grande que les forces les plus rapprochées de la section considérée auront une plus grande intensité.

Dans le cas d'une surcharge infiniment répartie, les efforts tranchants seront maxima quand elle s'étendra depuis l'un des appuis jusqu'à la section considérée.

Si donc nous déterminons pour toutes les sections d'une poutre les valeurs maxima du moment fléchissant et des efforts tranchants, et si nous les portons en ordonnées à partir d'un axe horizontal sur la verticale correspondant à chaque section, nous obtiendrons en joignant les extrémités de ces ordonnées par un trait continu la courbe des moments fléchissants et des efforts

tranchants maxima. Les plus grandes de ces ordonnées représenteront les maxima maximorum (maximum absolu).

CONSTRUCTION DES MOMENTS FLÉCHISSANTS ET DES EFFORTS TRANCHANTS MAXIMA DANS LE CAS D'UNE POUTRE REPOSANT EN SES DEUX EXTRÉMITÉS ET SUPPORTANT UNE SURCHARGE UNIFORMÉMENT RÉPARTIE.

Soit (Pl. VIII, fig. 107) une poutre reposant en ses deux extrémités et chargée d'un poids uniformément réparti proportionnel à la surface ombrée. Cette poutre, outre son poids propre p_1 par mètre courant, supporte une surcharge mobile uniformément répartie d'intensité p_2 . La charge totale par mètre courant de poutre sera :

$$p = p_1 + p_2.$$

Nous savons déjà que, dans ce cas, le moment fléchissant maximum correspond pour chaque section à la charge s'étendant sur toute la longueur de la poutre. Construisons tout d'abord séparément les courbes des moments correspondant à la charge permanente et à la surcharge mobile.

Pour cela, formons le polygone des forces en portant sur une verticale la charge permanente $p l = df$ (fig. 108); prenons une tension horizontale h , choisissons le pôle o de ce polygone à égale distance des points d et f et construisons le polygone funiculaire correspondant. Nous mènerons à cet effet par les points 4 et 1 (fig. 109) des parallèles aux rayons od et of du polygone des forces. Ces deux parallèles 4γ et 1γ seront des tangentes à la parabole des moments $4\beta 1$, qui se trouve ainsi parfaitement déterminée. Sur l'épure nous avons tracé en pointillés le polygone des forces et la courbe des moments correspondant à la charge permanente seule.

Quant au polygone des forces oac et à la parabole $4\delta 1$ des moments correspondant à la charge mobile s'étendant sur toute la longueur de la poutre, nous les avons indiqués en traits pleins.

Nous savons, comme nous l'avons vu plus haut, que :

$$\alpha\beta \cdot h = \frac{1}{8} p_1 \cdot l^2$$

D'où :

$$\alpha\beta = \frac{1}{8} \frac{p_1 \cdot l^2}{h}$$

Nous aurons de même :

$$\alpha\delta = \frac{1}{8} \frac{p_2 \cdot l^2}{h}$$

Ces deux formules nous permettront de tracer les deux paraboles sans passer par l'intermédiaire des polygones des forces.

La somme des moments fléchissants dus à l'action simultanée de la charge permanente et de la surcharge mobile se construira avec la plus grande facilité. Nous n'aurons en effet qu'à renverser autour de l'axe 4,1 la parabole correspondant à la charge permanente et nous obtiendrons ainsi en 4p1δ la surface des moments dus à la charge totale $p = p_1 + p_2$. Les valeurs maxima des moments développés dans la poutre seront représentées par les ordonnées de cette surface.

Nous pourrions aussi construire directement la courbe des moments fléchissants dus à l'action de la charge totale. En effet, portons dans le polygone des forces $gh = pl$ et menons dans le polygone funiculaire 4v et 1v parallèles aux rayons og et oh. Ces deux parallèles sont des tangentes en 4 et en 1 à la parabole des moments 4η1, que nous saurons tracer comme nous l'avons déjà fait précédemment. L'ordonnée maxima de cette parabole a pour expression :

$$\alpha\eta = \frac{1}{8} \frac{p \cdot l^2}{h}$$

Elle représente donc la valeur du plus grand moment fléchissant.

Bien qu'ils ne soient pas nécessaires pour tracer la courbe des moments fléchissants, nous n'en avons pas moins indiqué dans le polygone des forces (fig. 108) les rayons correspondant au

$\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$ et $\frac{3}{4}$ de la charge. Ces rayons nous serviront à déterminer les valeurs maxima des efforts tranchants dans les sections considérées.

Pour construire la courbe des efforts tranchants maxima, nous considérerons séparément l'influence de la charge permanente et celle de la surcharge mobile. Nous savons que, dans le cas d'une charge totale uniformément répartie, la courbe donnant les variations des efforts tranchants est une ligne droite, dont les ordonnées maxima correspondent aux verticales passant par les points d'appui et sont égales aux réactions des culées.

Ces ordonnées se trouvent portées à gauche en bd et à droite en bf (Pl. VIII, fig. 110).

Quant à l'effort tranchant correspondant à une section quelconque et à une charge mobile, il atteint sa valeur maxima sous la charge partielle s'étendant depuis l'appui jusqu'à la section considérée. Déterminons par exemple les efforts tranchants maxima des sections 1, 2, 3, 4. Pour cela, nous construirons la force extérieure correspondant à chacune de ces sections, la surcharge mobile s'étendant depuis l'appui B jusqu'à la section considérée, et nous porterons comme ordonnées chacune de ces résultantes aux points 1, 2, 3, 4, (Pl. VIII, fig. 111).

Au cas de charge 1, c'est-à-dire à la surcharge s'étendant sur toute la longueur de la poutre, correspondent la courbe des moments $4\delta 1$, la réaction $A = \frac{pl}{2}$ et l'effort tranchant $A = ba$.

Dans le cas de la charge 2, la courbe des moments est représentée par $1\delta r 2$, cette courbe se compose d'un arc de parabole $1\delta r$ et de la tangente $r 2$ à la parabole au point r . L'effort tranchant cherché sera donné dans le polygone des forces par la droite $2, 2$ interceptée par les rayons menés par le pôle o parallèlement aux côtés $r 2$ et $1, 2$ du polygone funiculaire.

A la charge 3 correspondent la courbe des moments $1\delta 3$ et l'effort tranchant $3, 3$ intercepté dans le polygone des forces par les rayons parallèles à $\delta 3$ et $1, 3$.

Pour la charge 4, la surface des moments sera représentée par

1s4 et l'effort tranchant par la droite 4,4. Afin de ne pas trop compliquer la figure, chacun des rayons parallèles menés par le pôle o du polygone des forces aux côtés $r2$ et 12 , etc. du polygone funiculaire se trouve simplement indiqué par un petit trait sur la verticale ac .

Portons-nous (Pl. VIII, fig. 111) chacune des valeurs ainsi déterminées sur la verticale correspondant à la section considérée, nous obtiendrons en joignant les extrémités de ces ordonnées la courbe des efforts tranchants maxima.

La surcharge vient-elle à se mouvoir dans le sens opposé, c'est-à-dire de A vers B, la courbe des efforts tranchants sera dans ce cas située au-dessous de l'axe bb (fig. 111). Ces deux courbes sont des paraboles et pourront se construire directement à l'aide des tangentes bb et ac . Quant à la tangente ac , elle est déterminée par les ordonnées ba et bc , c'est-à-dire par les réactions des appuis correspondant à la surcharge totale.

En additionnant les valeurs trouvées pour les efforts tranchants (Pl. VIII, fig. 110 et fig. 111), nous obtiendrons la courbe des efforts tranchants maxima (fig. 112) correspondant à la charge totale $p = p_1 + p_2$. Les ordonnées de cette courbe peuvent d'ailleurs se déterminer directement dans le polygone des forces ogh en menant par le pôle o des parallèles aux côtés correspondant aux figures des moments appartenant aux charges totales 1, 2, 3, 4. Dans ce cas, il ne faudra plus considérer séparément l'influence de la charge permanente et celle de la surcharge mobile.

Dans le cas de la charge totale, l'effort tranchant au point A est égal à la réaction $A = bg$, valeur qui se trouve portée de b en g (Pl. VIII, fig. 112).

Dans le cas de la charge 2, la partie de la courbe des moments $1nu$ reste la même ainsi que la force hi dans le polygone des forces. A cette force hi , il convient d'ajouter la grandeur $ik = \frac{p_1 l}{4}$; cette force $\frac{p_1 l}{4}$ agit au milieu de la partie de la poutre sur laquelle ne s'étend point la surcharge mobile.

Si donc nous complétons le polygone funiculaire, la surface

$1\eta uv2$ représentera la surface des moments dus à la charge 2. Menant alors dans le polygone des forces des parallèles à la ligne finale du polygone funiculaire 1,2 et à la tangente uv , la grandeur $2'2'$ interceptée par ces rayons sera l'effort tranchant cherché. Nous construirons de la même manière le polygone funiculaire $1\eta x3$ et le polygone des forces $ohd = ohb + obd$ correspondant à la charge 3. Nous mènerons par le pôle o du polygone des forces des rayons parallèles aux côtés du polygone funiculaire ηx et 3, 1 et nous trouverons la valeur de l'effort tranchant cherché $3'3' = b3'$.

Dans le cas de charge 4, le polygone des forces sera représenté par la droite $odm = odl + olm$; le polygone funiculaire correspondant sera $4\beta zn4$. Menant alors par o des parallèles à la ligne finale 4,4 et à la tangente zn du polygone funiculaire, nous aurons en $4'4'$ l'effort tranchant demandé.

Lorsque la poutre ne subit plus l'action de la charge mobile, c'est-à-dire lorsque celle-ci est arrivée en B, l'effort tranchant ne dépend plus alors que de la charge permanente et est égal à la réaction bf . Nous trouverons la valeur de cet effort dans le polygone odf en menant par le point o les rayons ob et of parallèles aux côtés 1,4 et 1 γ . Si nous faisons mouvoir la charge dans le sens opposé, c'est-à-dire de A vers B, nous obtiendrons une seconde courbe des efforts tranchants maxima identique à la première, mais de position inverse. Le maximum a lieu dans ce cas au-dessous de l'appui B.

Les courbes des efforts tranchants ainsi déterminées sont des paraboles pouvant se construire facilement à l'aide des tangentes gh et df . La tangente gh correspondrait à une charge totale et permanente $p = p_1 + p_2$, et la tangente df à la charge permanente seule p_1 .

$$gb = bh = \frac{1}{2} pl; \quad bd = bf = \frac{1}{2} p_1 l.$$

Dans les figures 111 et 112 (Pl. VIII), nous avons aussi tracé les tangentes aux milieux des courbes ab et gf .

Nous voyons donc (fig. 112) que dans le cas d'une surcharge mobile, l'effort tranchant dans une certaine partie de la poutre peut être tantôt positif, tantôt négatif, cas qui se présente pour la partie *mu* de la poutre (fig. 112). Quant à la distance des points *m* et *u*, elle dépend du rapport de la charge permanente à la charge mobile.

Dans l'exemple traité (Pl. VIII, fig. 107 à 112), nous avons pris :

$$l = 12^m ; p_1 = 0^t,2 : p_2 = 0^t,8$$

d'où :

$$p = p_1 + p_2 = 1^t,0.$$

Le moment maximum dû à la charge permanente a pour valeur :

$$M p_{1\max} = \alpha\beta \cdot h = 1^t,2 \cdot 3^m = 3^m,6.$$

ou bien encore :

$$M p_{1\max} = \frac{1}{8} p_1 \cdot l^2 = \frac{1}{8} 0^t,2 \cdot 12^2 = 3^m,6.$$

Le moment maximum dû à la surcharge mobile :

$$M p_{2\max} = \alpha\delta \cdot h = 4^t,8 \cdot 3^m = 14^m,4.$$

ou bien encore :

$$M p_{2\max} = \frac{1}{8} p_2 \cdot l^2 = \frac{1}{8} \cdot 0^t,8 \cdot 12^2 = 14^m,4.$$

Le moment maximum correspondant à la charge totale :

$$M p_{\max} = \alpha\eta \cdot h = 6^t \cdot 3^m = 18^m.$$

ou bien encore :

$$M p_{\max} = \frac{1}{8} p \cdot l^2 = \frac{1}{8} \cdot 1^t,0 \cdot 12^2 = 18^m.$$

Sur les appuis, les valeurs maxima des efforts tranchants sont ;

$$\text{pour la charge totale : } \frac{p \cdot l}{2} = \frac{1 \cdot 12}{2} = 6^t,$$

$$\text{pour la charge permanente : } \frac{p_1 \cdot l}{2} = \frac{0 \cdot 2 \cdot 12}{2} = 1^t,2$$

Quant aux efforts maxima correspondant aux sections menées à des distances $0 ; \frac{1}{4} l ; \frac{1}{2} l ; \frac{3}{4} l ; l$ de l'appui A, ils sont pour la charge permanente :

$$1^t,2 ; 0^t,6 ; 0^t,0 - 0^t,6 ; - 1^t,2 ;$$

pour la charge mobile :

$$4^t,8 ; 2^t,7 ; 1^t,2 ; 0^t,3 ; 0^t,0 ;$$

et enfin pour la charge totale :

$$6^t,0 ; 3^t,30 ; 1^t,2 ; - 0^t,3 ; - 1^t,2.$$

Comme nous l'avons fait remarquer plus haut il suffira de déterminer les tangentes lv et $v1$ (fig. 109), et gh et df (fig. 112) pour pouvoir construire les courbes des moments fléchissants et des efforts tranchants maxima. Mais pour donner une idée plus claire de la construction, nous avons dû entrer ici dans de plus amples détails.

CONSTRUCTION DES MOMENTS FLÉCHISSANTS ET DES EFFORTS TRAN-
CHANTS MAXIMA, DANS UNE POUTRE SUPPORTÉE EN SES DEUX EX-
TRÉMITÉS SOUS L'ACTION DE CHARGES MOBILES CONCENTRÉES.

Nous nous contenterons de traiter ici les cas les plus simples. Soit (Pl. VIII, fig. 113) une poutre supportant deux chariots à quatre roues dont la charge et l'écartement sont donnés.

Pour déterminer la courbe des moments fléchissants maxima, nous chercherons pour un certain nombre de sections de la poutre les ordonnées Y correspondant aux différentes positions de la surcharge. La plus grande des ordonnées trouvées pour chaque section sera alors une ordonnée de la courbe maxima. Au lieu de construire les polygones funiculaires correspondant aux différents déplacements de la surcharge, il sera plus simple de maintenir cette dernière dans une position fixe (nous n'aurons alors qu'un seul polygone funiculaire à tracer) et de laisser par contre la poutre se déplacer sous la surcharge. Suivre tous les déplacements possibles de la poutre est pratiquement inapplicable, aussi ne considérerons-nous dans chaque cas particulier qu'un certain nombre d'entre eux. Nous laisserons par exemple la poutre se déplacer d'une quantité égale à $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{10}$, etc. de sa portée. Si dans chaque position considérée, nous projetons, sur le polygone funiculaire, les deux extrémités de la poutre, nous obtiendrons en joignant entre eux les deux points ainsi obtenus les lignes finales des polygones funiculaires correspondant à chacune de ces positions.

Formons (Pl. VIII, fig. 114 et 113) le polygone des forces ors et le polygone funiculaire $aIV\alpha\beta\gamma O$ correspondant aux charges

des essieux 1, 2, 3, 4. Supposons que dans la position initiale OIV l'un des essieux se trouve placé directement au-dessus de l'appui gauche, désignons également par OIV la ligne finale du polygone funiculaire correspondant. Laissons ensuite la poutre se déplacer et prendre successivement les positions aa ; I I; bb , II II; cc ; III III; dd ; IV IV et désignons les lignes finales des polygones funiculaires correspondant par les mêmes lettres et les mêmes chiffres. C'est afin de rendre la construction plus facile que nous avons employé alternativement les chiffres romains et les caractères italiques. Lorsque la poutre occupera la position IV, IV, elle se trouvera complètement déchargée. Du nombre de déplacements dépendra le degré d'exactitude de la construction; dans chaque cas, il suffira de considérer la surcharge dans 6 ou 8 positions différentes.

Pour construire la surface des moments fléchissants maxima, nous pourrons opérer de deux manières. Portons à partir d'un axe horizontal commun considéré comme ligne finale les ordonnées des moments correspondant aux verticales 1, 2, 3, 4 pour chaque position donnée, ou autrement dit, reportons sur cet axe les différents polygones funiculaires, la courbe enveloppe de ces polygones limitera la surface des moments fléchissants maxima. Les polygones correspondant aux positions OIV; aa ; I I; bb ; II II; cc sont tracés en pointillés (fig. 115). Pour donner plus de clarté à cette figure, nous y avons indiqué simplement par de petits traits les verticales correspondant aux forces 1, 2, 3, 4, pour chaque cas considéré. De plus, nous n'y avons point reporté les polygones funiculaires III III, dd , et IV IV, sachant d'avance qu'ils tombent à l'intérieur des autres contours polygonaux déjà tracés et qu'ils ne correspondent à aucun maximum.

L'autre manière de procéder est beaucoup plus simple et donne d'excellents résultats dans le cas de poutres à grande portée supportant un grand nombre de charges. Ce procédé consiste à rechercher directement dans les différents polygones funiculaires l'ordonnée maxima correspondant à chaque section et à porter

cette valeur à partir d'un axe horizontal sur la verticale passant par cette section.

Prenons par exemple un point situé au huitième de la portée de la poutre. Si nous comparons entre eux les moments fléchissants en ce point pour les positions OIV, *aa*, I I, *bb*, II II, etc., nous trouvons facilement que la valeur maxima de ce moment correspond à la position II II, les positions voisines *bb* et *cc* donnant des valeurs moindres. Nous ferons remarquer en passant que nous n'aurons pas besoin de comparer entre elles toutes les ordonnées correspondant à une section déterminée; nous pourrions en effet nous arrêter aussitôt que nous observerons une tendance à la diminution.

Si nous établissons la même comparaison aux points situés à des distances $\frac{2l}{8}, \frac{3l}{8}, \frac{4l}{8}, \frac{5l}{8}, \frac{6l}{8}, \frac{7l}{8}$, de l'appui B, nous verrons que le moment maximum correspondra.

Pour le point $\frac{2l}{8}$, à la position II II.			
—	$\frac{3l}{8}$,	—	<i>b b</i> .
—	$\frac{4l}{8}$,	—	<i>b b</i> .
—	$\frac{5l}{8}$,	—	I I.
—	$\frac{6l}{8}$,	—	I I.
—	$\frac{7l}{8}$,	—	<i>a a</i> .

Ces ordonnées maxima se trouvent tracées en traits plus forts (Pl. VIII, fig. 113); elles se trouvent également portées dans la fig. 115, où nous leur avons donné la même désignation qu'aux charges auxquelles elles correspondent. Si nous joignons entre elles les extrémités de ces ordonnées, nous obtiendrons la surface des moments fléchissants maxima. Les ordonnées ainsi déterminées ne donnent pas exactement la valeur de moments maxima. Pour obtenir ces valeurs maxima, il faudrait opérer de nouveaux

déplacements de la poutre et faire concorder l'une des charges concentrées avec la verticale passant par la section considérée.

En comparant les deux surfaces ainsi construites, nous remarquerons qu'en certaines sections les ordonnées de la première sont plus grandes que celles de la seconde. Ces différences sont très-petites et par suite sans importance. L'ordonnée maxima de cette surface représentera le moment maximum absolu. La première construction donne rb et la seconde sb comme valeurs de l'ordonnée de ce moment maximum.

Dans certains cas la recherche du moment maximum absolu aura seul un intérêt direct. Nous n'aurons pas alors besoin de construire la fig. 115, et nous nous contenterons de chercher dans la fig. 113 la plus grande des ordonnées des polygones funiculaires correspondant aux positions aa , I I, bb , II II.

Pour déterminer l'effort tranchant maximum correspondant à une section quelconque, nous ne devons, comme nous l'avons déjà dit plus haut, considérer que les forces agissant d'un même côté de cette section. Cherchons par exemple l'effort tranchant maximum pour la section menée à la distance $\frac{1}{4}l$ de l'appui A. Nous considérerons pour cela la poutre dans sa position I, I; la charge 1 tombera alors directement au-dessus de la section considérée et les autres charges à droite.

L'effort tranchant sera égal à la réaction de l'appui B. Nous déterminerons la valeur de cette réaction B dans le polygone des forces en menant par le pôle o des parallèles au côté I, IV et à la ligne finale I, I du polygone funiculaire correspondant. Ces parallèles déterminent en Ir la grandeur de cette réaction.

Nous pourrions donc trouver l'effort tranchant maximum pour toute section de la poutre autre que la section III. La construction de ces efforts se trouve indiquée dans le polygone des forces pour les différents cas de surcharge I I; II II; III III; IV IV. Les diverses réactions portent les mêmes lettres que les charges correspondantes. Connaissant les valeurs des différentes réactions, nous pourrions construire la courbe des efforts tranchants (Fig.

116); cette courbe sera d'autant plus exacte que les sections considérées auront été prises en plus grand nombre. Dans le cas particulier qui nous occupe, il nous suffira d'en considérer quatre.

Nous obtiendrons la courbe des efforts tranchants dirigés en sens inverse, en faisant mouvoir la charge roulante dans la direction opposée et en supposant seule chargée la partie de la poutre située à gauche de la section. Mais nous savons que cette courbe est symétrique de la première courbe construite par rapport à l'axe de la poutre; nous n'aurons donc pas besoin de répéter à nouveau la construction précédente, et nous nous contenterons de reporter les valeurs trouvées en dessous de l'axe rr comme cela se trouve indiqué (Pl. VIII, fig. 116).

Si nous négligeons l'action de la charge permanente, nous trouverons comme valeurs des efforts tranchants sur l'un des appuis Or , et sur l'autre zéro.

Dans l'exemple traité (Pl. VIII, fig. 113), la poutre a 12^m de longueur, l'écartement des essieux 1, 2 et 3, 4 est 1^m20 et celui des essieux 2, 3, 1^m60 . Les charges des essieux sont :

$$1 = 2^t; 2 = 2^t; 3 = 4^t,5; 4 = 4^t,5.$$

La valeur du moment maximum construit d'après la première méthode est :

$$M_{\max} = rb \cdot h = 4^t,02 \cdot 4^m = 16^m,08.$$

Le même moment construit d'après la deuxième méthode approximative sera :

$$M_{\max} = sb \cdot h = 3^t,96 \cdot 4^m = 15^m,84.$$

La différence entre ces deux valeurs est :

$$0^m,24 \text{ c'est-à-dire } 1,4 \text{ 0/0.}$$

Les efforts tranchants maxima correspondant aux positions 0,IV; I,I; II,II; III,III; IV,IV; (fig. 116) ont pour valeur :

$$Or = 5^t,95; Ir = 4^t,2; IIr = 2^t,45; IIIr = 0^t,83; IVr = 0^t,0.$$

Pour traiter le problème dans sa généralité, il faudra aux résultats trouvés ci-dessus ajouter les valeurs des moments fléchissants et des efforts tranchants dus à la charge propre de la poutre.

Soit (Pl. VIII fig. 117) un système de plusieurs poutres placées les unes à la suite des autres supportant une voie ferrée. Ces poutres

sont reliées entre elles par des entretoises porteuses et par des traverses sur lesquelles le rail vient s'assujettir. Nous voulons déterminer le moment maximum absolu et la réaction maxima N de l'un des appuis sous le passage de deux wagons également chargés.

Nous construirons le polygone des forces 1, 2, 3, 4 et le polygone funiculaire correspondant $I\alpha\beta\gamma\delta O$ (Pl. VIII, fig. 117 et 118.) Considérons la surcharge dans la position indiquée (fig. 117). Dans ce cas, la ligne joignant les points O et α ne sera pas la ligne finale du polygone funiculaire; la charge de l'essieu 1 se transmettant aux poutres principales non pas directement, comme dans le cas de poutres sous rails, mais par l'intermédiaire de deux traverses consécutives. Il faudra donc d'abord répartir la force 1 sur les deux traverses voisines au moyen du polygone funiculaire $I\alpha\rho$. Nous déterminerons ensuite en considérant les nouvelles forces trouvées le polygone funiculaire $II I\rho\beta\gamma\delta O$. Les forces qui agissent en I et ρ sont les composantes de la charge 1. Nous obtiendrons les valeurs de ces composantes dans le polygone des forces en menant par le pôle o des parallèles aux côtés correspondants du polygone funiculaire $II I$ et $I O$ ainsi qu'aux côtés $O\rho$ et $\rho\alpha$. Ces valeurs nous seront données par les droites ax et xb . Leur somme est $ax + xb = 1$.

Il nous faudra de même répartir les forces 2 et 3 sur les entretoises voisines. Quant à la force 4, elle agit dans le plan d'une traverse et se transmet par suite directement à la poutre.

Le polygone funiculaire des forces agissant sur la poutre principale sera donc représenté par $II I\rho\tau\delta O$; sa ligne finale sera la droite OO .

La poutre à gauche de l'appui n'est soumise qu'à l'action de la composante ax ; le polygone funiculaire correspondant sera OIO avec OO comme ligne finale.

Laissons maintenant le système se déplacer sous la surcharge d'une distance égale à $\frac{1}{6}$ de la portée; celle-ci prendra la position I, I, I . Dans cette nouvelle position les charges 1, 2, 3, 4 se

transmettront à la poutre principale par l'intermédiaire, d'autres traverses et le polygone funiculaire correspondant $I\alpha\nu\sigma o$ se déterminera comme ci-dessus. La droite I, I sera la ligne finale. Une partie de la surcharge se trouvant dans ce cas transmise à la partie droite de la poutre, le polygone funiculaire correspondant sera I O I avec la droite II comme ligne finale.

Nous avons désigné les traverses par la lettre o et les appuis par la lettre O dans la position initiale O, O, O et par les chiffres 1, dans la position I, I, I. Considérons la poutre dans une troisième position correspondant à un déplacement $\frac{2}{6}l$, désignons par 2 les nouveaux emplacements des traverses. Nous remarquons que dans ce cas les positions des traverses concordent avec celles du cas O. La répartition des charges 1, 2, 3, 4 sur les traverses sera la même que dans la position initiale O, O, O, le polygone funiculaire ne changera pas ; seules les lignes finales seront autres et deviennent II, II.

Déplaçons à nouveau le système des poutres et chaque fois d'une longueur égale à $\frac{1}{6}l$. Les nouvelles positions seront III, III, III; IV, IV, IV; V, V, V. Aux positions O, O, O; II, II, II; IV, IV, IV correspondra le polygone funiculaire II I $\rho\tau\delta$ O et aux positions I, I, I; III, III, III; V, V, V, le polygone $I\alpha\nu\sigma$ OV. Ce second polygone funiculaire est tracée en lignes pointillées.

Ayant ainsi tracé les surfaces des moments fléchissants pour chaque position de la poutre, nous pourrons trouver facilement l'ordonnée donnant le moment maximum. Cette ordonnée correspondra à la position O, O, O et aura pour valeur $Y_{\max} = n\tau$.

Le moment maximum absolu sera donc : $M_{\max} = n\tau \cdot h$.

Pour trouver le maximum absolu de la réaction, nous chercherons dans le polygone des forces les valeurs des réactions dues aux différentes positions de la poutre et nous comparerons ces valeurs entre elles.

Considérons la position O, O, O. Les réactions correspondant aux deux poutres seront déterminées dans le polygone des forces,

pour l'une par les rayons parallèles aux côtés du polygone funiculaire OO et $O\rho$, pour l'autre par les rayons parallèles aux côtés OO et IO . Les côtés OI et $O\rho$ se confondant en une même droite, les rayons parallèles ne formeront qu'un seul et même rayon, et par suite la réaction de l'appui, qui n'est autre que la somme des réactions OO' correspondant à chaque poutre, sera déterminée par les rayons parallèles aux deux lignes finales OO et OO . Cette réaction se trouve désignée par OO dans le polygone des forces.

Nous construirons de la même manière la réaction I, I correspondant à la position I, I, I en menant par le pôle du polygone funiculaire des parallèles aux lignes finales I, I et I, I . En répétant à nouveau la même construction, nous trouverons les grandeurs des réactions II, II ; III, III ; IV, IV , etc. Pour ces différentes positions, la valeur de la réaction va toujours croissant jusqu'à la position III, III pour diminuer ensuite.

A la position III, III, III correspondra donc le maximum de N .

Dans chaque cas particulier nous n'aurons nullement besoin de rechercher les valeurs des réactions sous les différents cas de surcharge possibles et pourrons arrêter nos recherches aussitôt que nous remarquerons dans la grandeur de N une tendance à décroître.

Quant aux moments fléchissants dans le rail, ils sont donnés par les polygones funiculaires.

$$I\alpha\rho, \rho\beta\tau, \tau\gamma\delta, \alpha\beta\nu, \nu\gamma\sigma, \sigma\delta O.$$

Le moment maximum absolu se produira lorsqu'une roue se trouvera placée au milieu de la portée des deux traverses ; sa valeur sera $O\alpha \cdot h$.

Nous pourrions également, en répétant la construction indiquée ci-dessus, déterminer le maximum absolu de la réaction sur une traverse. Toutefois, afin de ne pas compliquer l'épure, cette construction ne s'y trouve pas indiquée.

Dans l'exemple traité (Pl. VIII, fig. 117) nous avons considéré une série de nœuds de 3^m de portée reposant en leurs extrémités. L'écartement des tra-

verses est de $1^m,0$ celui des essieux 1 et 2 de $0^m,8$ et celui des essieux 2 et 3 de $0^m,9$. Tous ces essieux sont également chargés savoir ;

$$1 = 2 = 3 = 4 = 1^t,5.$$

Le moment maximum absolu aura pour valeur :

$$M_{\max} = \tau n \cdot h = Y_{\max} h = 1^t,07 \cdot 2^m = 2^m,14.$$

La réaction maxima d'un appui :

$$N_{\max} = III \ III = 4^t,15,$$

et le moment maximum dans le rail :

$$O\alpha \cdot h = 0^t,15 \cdot 2 = 0^m,3.$$

DES FORCES EXTÉRIEURES ET DES FORCES INTÉRIEURES AGISSANT DANS UNE CONSTRUCTION

Considérons un corps d'une forme quelconque soumis à l'action des différentes forces de grandeur et de direction données, et se tenant en équilibre (Pl. IX, fig, 119). Supposons de plus que ces forces agissent dans un même plan vertical (cas qui se présentera ordinairement dans la pratique).

Si au moyen d'une section xx , nous partageons ces forces en deux parties, et si nous considérons séparément l'action de chaque partie, en vertu des lois de l'équilibre, les résultantes correspondant à chaque groupe devront être nécessairement égales entre elles et agir suivant la même direction mais en sens inverse. La résultante R_1 des forces à gauche de la section xx sera donc égale à la résultante R_2 des forces situées à droite de la même section.

Si le corps se trouvait partagé en deux parties par la section considérée, chacune de ces parties du corps tendrait à se mouvoir suivant la direction de la résultante correspondante.

L'action de ces forces R engendre dans la section des efforts de cohésion, qui s'opposent au mouvement.

Les forces de résistance (forces de cohésion), tiennent donc en équilibre les résultantes R_1 et R_2 , et comme celles-ci, elles sont de plus en équilibre. Si donc nous désignons par R'_1 et R'_2 les

deux résultantes de ces dernières forces, nous pourrons écrire la relation suivante :

$$R'_1 = R'_2$$

Pour distinguer ces genres d'efforts, nous désignerons par *forces extérieures*, les forces à l'action desquelles le corps se trouve soumis et par *forces intérieures*, les efforts développés par celles-ci dans le corps lui-même. La résultante des forces extérieures agissant sur une partie du corps, est en équilibre avec la résultante des forces intérieures exercées par la partie voisine ou bien encore avec la résultante des forces extérieures agissant sur la partie voisine. Ces deux dernières résultantes pourront alors être indifféremment substituées l'une à l'autre.

En effet, considérons (Pl. IX, fig. 120) avec la résultante des forces extérieures agissant sur cette même partie, une partie du corps à gauche de la section xx et soit R_1 la résultante des forces extérieures agissant sur cet élément. Cette force R_1 sera en équilibre avec la résultante R'_2 des forces intérieures développées dans la partie correspondante située à droite de xx . Mais R'_2 , est égale à R_2 , et a de plus même direction et même signe; R_2 déterminera donc le signe des forces intérieures agissant sur la partie gauche dans la section xx . Dans le cas indiqué (fig. 120), la force R'_2 passe par le centre de gravité de la section considérée et de plus se trouve dirigée contre cette section. La partie à gauche de xx sera donc comprimée.

Il suit de là que nous pourrons toujours supposer enlevée la partie à droite de la section, et la remplacer par la résultante des forces intérieures, sans que pour cela les conditions d'équilibre se trouvent changées.

La résultante des forces extérieures à une section est-elle connue, la résultante des forces intérieures agissant dans cette section le sera aussi. Si, par exemple, nous cherchons la résultante des forces intérieures pour la partie à gauche de xx , nous n'aurons qu'à déterminer la résultante des forces extérieures agissant à gauche de cette même section; cette dernière prise en signe contraire sera la force cherchée. Nous pourons donc tou-

jours trouver la résultante des forces intérieures dans une section quelconque, quand les forces extérieures seront connues, puisqu'il est possible de déterminer une force, qui soit en équilibre avec la résultante des forces extérieures agissant soit à gauche, soit à droite de la section considérée. Toutefois, nous ne pourrons trouver que dans certains cas particuliers la manière dont cette résultante se répartit dans les différents éléments de la section.

Les types de construction que nous retrouverons dans la pratique, sont en général formés par l'assemblage de barres rigides.

Nous mènerons toujours les sections xx perpendiculaires à l'axe longitudinal de ces barres, nous décomposerons la résultante des forces extérieures suivant deux directions l'une parallèle et l'autre perpendiculaire à la section considérée. Ces composantes une fois déterminées, nous trouverons les forces intérieures qui leur font équilibre.

Les efforts qui se développent dans une construction sous l'action de forces extérieures sont de différentes natures.

En effet, considérons un corps de forme prismatique (Pl. IX fig. 121) et déterminons les efforts engendrés dans la section xx . Pour cela, cherchons la résultante R de toutes les forces extérieures situées à gauche du plan xx ; cette résultante prise en signe contraire sera égale à la résultante de toutes les forces intérieures agissant dans la section considérée. Décomposons R en deux forces P et Q , l'une parallèle, l'autre perpendiculaire à l'axe du prisme. La force Q tend à cisailer le prisme dans la section xx , les forces intérieures lui font équilibre, et par suite leur résultante est égale à la force Q , mais se trouve dirigée en sens inverse (Pl. IX, fig. 122).

Reste à considérer l'action de la force P . Pour cela, portons au centre de gravité b dans la section xx et sur une parallèle à la direction P deux forces égales et opposées $+P$ et $-P$. L'addition de ces deux forces $+P$ et $-P$ ne changera en rien les conditions de l'équilibre du prisme. La force $+P$ (fig. 122) agissant contre la section xx , sera un effort de compression. Les forces P portées en af et en bd (fig. 121) forment un couple positif dont le

moment a pour expression $P.ab$. Ce couple sera tenu en équilibre par un couple négatif de même grandeur et dû à l'action des forces intérieures. Quant à la grandeur et à la position des forces composant ce couple, nous ne les connaissons pas encore, mais nous pourrons toujours appliquer dans la section xx un couple négatif SS tel que $S.h = P.ab$ (fig. 122).

Le moment $P.ab$ cherche à faire fléchir le prisme dans le sens longitudinal.

La résultante R des forces situées à gauche de la section xx engendre donc les trois genres d'efforts intérieurs suivants : un effort de cisaillement Q , un effort de compression P , et un moment fléchissant $M = S.h$.

Un autre genre d'efforts n'est point possible dans le cas où toutes les forces considérées agiront dans le même plan. Mais si ces forces n'agissent pas dans le même plan, la poutre sera en outre soumise à un moment de torsion. Nous devons donc, pour ne pas avoir de torsion dans une poutre, répartir la charge permanente et la surcharge de telle manière que toutes deux se concentrent dans le plan vertical passant par l'axe de la poutre.

La résultante des forces extérieures est-elle perpendiculaire à l'axe longitudinal de la poutre, cette résultante n'engendrera alors qu'un effort de cisaillement et qu'un moment fléchissant. Soit (Fig. 123) R la force extérieure à la section xx , portons en b deux forces égales et de signes contraires $+R$ et $-R$; à la force extérieure $R = bc$ fera équilibre à la force intérieure $R = ba'$ (Pl. IX, fig. 124). Quant au moment fléchissant négatif $R.be$, nous pourrons le supposer tenu en équilibre par le moment positif Sh . De tels efforts se produisent dans les poutres droites dont les appuis se trouvent au même niveau et nous pourrons toujours, comme nous l'avons vu dans le courant de cet ouvrage, déterminer les valeurs du moment fléchissant et de l'effort tranchant dans une section quelconque.

Si la résultante des forces extérieures tombe dans la section considérée (Pl. VII, fig. 125 et 126), la poutre ne sera soumise dans cette section qu'à un effort de cisaillement. A la force exté-

rieure $R = ab$ (fig. 125) fait équilibre la force intérieure $R = a'b$ (fig. 126). De tels efforts se présentent dans les rivets et les boulons.

Si la résultante R des forces extérieures est parallèle à l'axe de la barre considérée, la composante perpendiculaire, et par suite l'effort de cisaillement seront nuls. Dans ce cas, la poutre sera soumise à un moment fléchissant positif ou négatif et à un effort de tension ou de compression. Portons (Pl. IX, fig. 127) en b deux forces égales et de signe contraire $+R$ et $-R$; la force intérieure $R = bc'$ (fig. 128) fera équilibre à l'effort de compression $R = bc$ (fig. 127). De même le moment positif Sh détruira l'action du moment négatif $R \cdot ab$. Une charge verticale excentrique agissant sur une colonne développera dans celle-ci des efforts de cette nature.

Si la direction de la résultante R concorde avec l'axe de la barre considérée, elle ne développera alors dans celle-ci que des efforts de traction ou de compression.

Ainsi, à la force extérieure $R = bc$ (Pl. IX, fig. 129) fait équilibre la force intérieure $R = bc'$ (fig. 130), qui, dans ce cas, sera un effort de tension. Une charge verticale concentrique à une colonne développe dans celle-ci des efforts de cette nature.

Il suit de ce qui précède que les forces extérieures agissant dans le plan d'une poutre développent dans chaque section des efforts de tension ou de compression, des moments de flexion et des efforts de cisaillement.

Si donc nous voulons qu'une poutre ou une pièce quelconque d'une construction ne soit soumise qu'à des efforts de traction ou de compression, il faudra que la résultante des forces extérieures à une section agisse suivant l'axe longitudinal de cette pièce.

De la répartition des forces extérieures résulte la position de la résultante. Quant à la position des éléments rencontrés par une section xx , il dépend de la forme même de la poutre.

POUTRES OU TOUTE SECTION NE TROUVE QU'UNE SEULE
BARRE SOUMISE A DES EFFORTS DE TENSION OU DE COMPRESSION.

Cas général

Nous appellerons poutre homogène toute poutre ne se composant dans toutes ses parties que d'un seul élément, les poutres en forme de double T par exemple. Par contre, nous désignerons sous le nom de poutre composée toute poutre dans laquelle une section rencontrera deux, trois, etc. éléments.

Toute poutre droite homogène doit résister à l'action d'un moment fléchissant et d'un effort tranchant.

Nous allons déterminer la forme que nous devons donner à une poutre pour qu'elle ne subisse que des efforts de tension ou de compression. Considérons (Pl. IX, fig. 130) un corps de forme quelconque soumis à l'action de plusieurs forces agissant toutes dans un même plan et se tenant en équilibre, et cherchons si dans la section x_1x_1 , nous ne pourrions pas remplacer une partie de la matière par une barre rigide, ne travaillant pas à la flexion.

Déterminons la résultante R_{x_1} , des forces extérieures à la section x_1x_1 . Il est évident que dans l'espace où cette résultante ne variera pas, (ici dans l'espace compris entre les forces 3 et 4) nous pourrions substituer à la matière du corps une barre rectiligne rigide ab , dont l'axe correspondra avec la direction de la résultante ; cette barre ne travaillera pas à la flexion. De même pour la section x_2x_2 , un élément rectiligne bc dont l'axe longitudinal correspondra avec la direction de la résultante R_{x_2} remplira le même office entre b et c que la matière du corps lui-même. Il résulte de ce qui précède que nous pourrions transformer le corps considéré et le remplacer par une série de barres de moindre section soumises à des efforts de tension ou de compression que nous saurons déterminer. Voir l'exemple (Pl. IX, fig. 130) où la ligne pointillée indique le système d'éléments capables de résister aux forces extérieures.

Nous aurons souvent à calculer des constructions de ce genre qui rentrent dans le type de poutres à réactions obliques. La forme d'une poutre correspondant à une charge donnée est identique avec le polygone funiculaire ; chaque côté de ce polygone représente en effet la direction de la résultante des forces agissant sur la section considérée. A chaque charge correspond une forme déterminée de la poutre, dont les éléments ne travailleront qu'à la traction et à la compression, et réciproquement. A des forces parallèles correspond un nombre indéfini de formes variant avec les différentes tensions horizontales.

Les formes ainsi déterminées satisferont aux conditions énoncées ci-dessus aussi longtemps que la résultante ne changera pas de position, c'est-à-dire aussi longtemps que le polygone funiculaire ne variera point. Or, un polygone funiculaire ne changera pas tant que les forces correspondantes ne varieront pas d'intensité ou varieront toutes dans la même proportion. Une force seule varie-t-elle d'intensité, ou bien toutes les forces varient-elles d'une manière quelconque, le polygone funiculaire changera alors de forme, et les éléments de la poutre ne seront plus seulement soumis à des efforts de traction ou de compression, ils devront de plus résister à des moments de flexion.

Nous aurons dans la pratique en général à faire à des charges verticales (poids) ; seules les réactions des appuis pourront avoir des directions obliques.

Forme d'une poutre sous l'action de différentes charges verticales.

Soient (Pl. IX, fig. 131 et 132) données les forces comprises entre les lignes mn et nn passant par les points d'appui ; nous voulons déterminer la forme qu'il nous faudra donner à une poutre dont les éléments ne doivent résister qu'à des efforts de tension et de compression.

Pour cela, construisons au moyen de la force auxiliaire $A = oa$ le polygone funiculaire $\alpha\beta\gamma\delta\eta\rho$ correspondant aux forces parallèles 1, 2, 3, 4. La poutre, dont les éléments se confondront avec

les côtés de ce polygone funiculaire satisfera aux conditions énoncées ci-dessus ; ses réactions seront $A = oa$ et $B = ob$, leurs directions seront déterminées par l'équilibre du système A, 1, 2, 3, 4, B ; les flèches indicatrices de A et de B courront alors dans le même sens que celles des forces 1, 2, 3, 4. Quant aux forces agissant dans les éléments de la poutre, elles se trouvent données en position par les côtés du polygone funiculaire ; en grandeur et en direction dans le polygone des forces par les rayons parallèles correspondants.

Ainsi la barre $\beta\gamma$ est soumise à l'action de la résultante R_x des forces agissant sur la section xx , c'est-à-dire de la somme des forces A et 1 ; cette résultante est donnée en grandeur par le rayon oc , elle agit de o vers c . Quant à la force intérieure qui lui fait équilibre, elle est de direction opposée ; elle est donc dirigée vers la section xx ; la barre $\beta\gamma$ sera par suite soumise à un effort de compression.

La résultante des forces A, 1, 2, 3, 4 extérieures à la section x_1, x_1 , est $ob = B$, elle a le signe contraire que la réaction B. La force intérieure, qui lui fait équilibre, sera de signe contraire, et la barre $\eta\rho$ se trouvera également comprimée. Nous déterminerons de même les résultantes des forces extérieures A, od, oe , agissant dans les éléments $\alpha\beta, \upsilon\delta, \delta\eta$, qui seront comprimés, ce qui du reste, se voit clairement dans le polygone des forces, où toutes les résultantes partielles ont même signe.

La composante horizontale des forces agissant dans chaque élément de la poutre a la valeur constante $H = of$ et la somme des composantes verticales des réactions af, fb , est égale à la somme des forces considérées. Nous pourrions, pour une seule et même charge, construire une infinité de polygones funiculaires, et par conséquent une infinité de poutres répondant aux conditions exigées. La forme de la poutre sera d'autant plus aplatie et ses différents éléments d'autant plus comprimés que la composante horizontale H aura une plus grande intensité et réciproquement.

Quant aux composantes verticales des réactions, elles auront

toujours les mêmes valeurs, celles-ci ne dépendant que de la grandeur des forces 1, 2, 3, 4 et nullement de la forme de la poutre. Il nous restera donc, dans chaque cas particulier, à choisir pour la poutre la forme la plus convenable, ou autrement dit la forme la plus économique satisfaisant aux conditions du problème.

La grandeur de l'une des deux réactions est-elle donnée, la forme de la poutre se trouvera par le fait même déterminée ; puisque, dans ce cas spécial, nous ne pourrons construire qu'un seul polygone funiculaire.

Dans l'exemple traité (Pl. IX, fig. 131 et 132), l'écartement des appuis est de 10^m et les forces considérées ont pour valeurs :

$$1 = 1^t ; 2 = 0^t,9 ; 3 = 0^t,5 ; 4 = 0^t,8.$$

Nous avons pris le pôle *o* du polygone des forces tel que la réaction A soit $A = oa = 3^t,3$, et nous avons trouvé dans les différents éléments de la poutre les efforts de compression suivants :

Dans $\alpha\beta$	un effort	$oa = A = 3^t,31$
— $\beta\gamma$	—	$oc = 2^t,68$
— $\gamma\delta$	—	$od = 2^t,36$
— $\delta\eta$	—	$oe = 2^t,32$
— $\eta\rho$	—	$ob = B = 2^t,47$

La composante horizontale est constante pour toutes les sections et a pour valeur $H = of = 2^t,32$.

La composante verticale de la réaction A est $af = 2^t,35$; celle de la réaction B $fb = 0^t,85$. Leur somme est :

$$fa + fb = 1 + 2 + 3 + 4 = 3^t,20$$

c'est-à-dire égale à la somme des forces données.

Chaque élément de la poutre peut être remplacé par un appui placé en un point quelconque de cet élément et exerçant sur lui une réaction égale à la résultante des forces agissant en ce point, sans que pour cela l'équilibre soit détruit et que la nature des efforts développés dans les autres éléments soit altérée. (Voir la poutre indiquée Pl. IX, fig. 132). De même que la nouvelle poutre ainsi obtenue (Pl. IX, fig. 134) est une partie de la précédente ; de même le polygone des forces correspondant (fig. 133) est une partie du polygone des forces précédent.

Supposons maintenant que la forme de la poutre soit donnée ainsi que la charge totale à laquelle elle se trouve soumise, nous pourrions déterminer le rapport des différentes charges, qui sollicitent cette poutre, dans le cas où tous ses éléments devront être ou comprimés ou tendus. Soit par exemple la poutre de forme symétrique indiquée (Pl. IX, fig. 136). Prenons dans le triangle des forces (fig. 135) une longueur ab proportionnelle à la charge totale. Menons par a une parallèle à $\alpha\beta$, par b une parallèle à $\delta\eta$, et prolongeons-les jusqu'en leur point de rencontre o . Les droites oa et ob représenteront les réactions dues à l'action de la charge considérée. Si de plus nous menons par o une parallèle à l'élément $\beta\gamma$, nous obtiendrons en $ac=1$ la valeur de la force agissant au point β . Nous trouverons de même en menant par o des parallèles à $\gamma\delta$ et à $\delta\eta$ les forces $cd=2$ et $db=3$ agissant aux points γ et δ . Le rapport entre les forces concentrées aux sommets de la poutre sera donc :

$$1 : 2 : 3 = ac : cd : db.$$

Aussi longtemps que ce rapport existera entre les forces 1, 2, 3, nous serons sûrs que les résultantes correspondantes se confondront avec les axes des éléments considérés. A la simple inspection du polygone des forces, nous pourrions remarquer qu'à une forme symétrique de la poutre correspond une répartition symétrique de la charge.

Nous avons pris dans l'exemple indiqué, (Pl. IX, fig. 135 et 136) la charge totale $ab = 4^t,0$; et nous avons trouvé comme charges concentrées aux points β, γ, δ correspondant à la forme donnée, les valeurs suivantes :

$$1 = 1^t,63 ; 2 = 0^t,74 ; 3 = 1^t,63$$

Dans les éléments $\alpha\beta$ et $\delta\eta$ agissent les efforts $oa = ob = A = B = 2^t,25$; dans $\beta\gamma$ et $\gamma\delta$, $oc = od = 1^t,11$.

Quant à la tension horizontale, elle a pour intensité $H = 1^t,04$.

La forme la plus simple des constructions rentrant dans ce genre de poutres est représentée (Pl. IX, fig. 138). Elle se compose simplement de deux éléments et la charge agit au point de rencontre de leurs axes. Pour déterminer les forces dans $\alpha\beta$ et $\beta\gamma$, portons (fig. 137) en ab la force 1 ; par a menons une

parallèle à $\alpha\beta$ et par b une parallèle à $\beta\gamma$. Ces deux parallèles se coupent en un point o . Les valeurs des réactions ainsi déterminées $oa = A$ et $ob = B$ représentent aussi les valeurs des forces intérieures dans les éléments $\alpha\beta$ et $\beta\gamma$.

Dans l'exemple traité (Pl. IX, fig. 138) les appuis sont à une distance $l = 6$; la force 1 a été prise $1 = 2^t$, et les valeurs des réactions seront :

$$A = 1^t,42 \text{ et } B = 1^t,42.$$

La construction la plus simple après celle indiquée ci-dessus se trouve représentée (Pl. IX, fig. 140) et se compose de trois éléments. Nous désignerons les constructions de ce genre sous le nom de poutres avec contrefiches. Pour déterminer les efforts agissant dans les éléments de cet ouvrage, formons le polygone des forces (fig. 139) et portons 1 = ac et 2 = cb . Menons par a une parallèle à $\alpha\beta$, par b une parallèle à $\gamma\delta$ et prolongeons-les jusqu'en leur rencontre o . Les lignes oa et ob représentent les forces agissant dans $\alpha\beta$ et dans $\gamma\delta$. Les réactions des appuis sont également : $A = oa$ et $B = ob$.

Reste à trouver l'effort agissant suivant $\beta\gamma$. Menons à cet effet par le pôle o une parallèle à cette direction ; oc sera la valeur de la force cherchée. La composante horizontale est constante pour tous les efforts développés dans l'ouvrage et représentée par le rayon oc .

Dans l'exemple traité (Pl. IX, fig. 139 et 140), les appuis se trouvent à un écartement $l = 8^m$; les charges 1 et 2 sont :

$$1 = 1^t,2 \text{ et } 2 = 1^t,2.$$

La construction graphique des efforts a donné pour les trois éléments les valeurs suivantes :

$$oa = A = 1^t,70 ; oc = 1^t,2 ; ob = B = 1^t,70.$$

Poutre parabolique.

Nous avons vu qu'à une charge donnée correspond un polygone funiculaire déterminant la forme de la poutre. Il suit de là que la forme de toute poutre, soumise à l'action d'une charge de répartition définie, se trouve déterminée à l'avance. Ainsi à une

charge répartie correspondra une poutre courbe dont la forme sera identique à celle du polygone funiculaire correspondant.

A une charge uniformément répartie sur la projection horizontale de la poutre, correspondra une poutre de forme parabolique que nous pourrons construire avec une tension horizontale quelconque, et quel que soit le niveau des appuis. La poutre parabolique indiquée (Pl. IX, fig. 142) a ses appuis au même niveau ; les réactions de ces appuis auront donc même valeur. Le pôle o du polygone des forces (Pl. IX, fig. 141) se trouvera par conséquent à égale distance des extrémités de la ligne ab représentant la charge totale. La forme parabolique de la poutre sera plus ou moins aplatie, suivant que la distance polaire od aura été prise plus ou moins grande.

La parabole est déterminée, comme nous le savons, par les tangentes $\alpha\beta$ et $\gamma\beta$. Quant à la charge uniformément répartie p par mètre courant de projection horizontale, nous la représenterons par la surface ombrée qr , et nous aurons $pl=ab$. La force agissant dans une section quelconque m se trouvera dans le polygone des forces, soit en menant par o une parallèle à la tangente xx , soit en portant sur la verticale ab une longueur ac égale à la charge correspondante qm . Le rayon oc représentera en grandeur et en direction la force agissant dans cette section m . Les appuis se trouvant au même niveau, leurs réactions seront égales et auront pour valeur $A=oa=B=ob$.

Si la charge uniformément répartie par mètre courant de projection horizontale ne se transmet à la poutre qu'en certains points, comme dans la poutre représentée (Pl. X, fig. 144) aux points $\beta, \gamma, \delta, \eta$, le polygone funiculaire $\alpha\beta\gamma\delta\eta\nu$ enveloppant la parabole déterminera la forme à donner à la poutre. Ce polygone sera tangent à la parabole aux points α, m, n, s, ν c'est-à-dire aux points de la parabole correspondant aux divisions de la surcharge. Quant à la hauteur de la poutre, elle sera égale à la flèche de la parabole.

La force agissant dans l'élément $\beta\gamma$, par exemple, se déterminera dans le polygone des forces par la grandeur du rayon oc

mené parallèlement à $\beta\gamma$ (Pl. X, fig. 143). La poutre ayant une forme symétrique, les réactions des appuis seront par suite égales entre elles.

Nous avons pris dans les exemples traités (Pl. IX, fig. 141 et 142 et Pl. X fig. 143 et 144) les appuis à un écartement $l = 10^m$, et la charge égale à $0,3'6$ par mètre courant de projection horizontale. La charge totale est : $ab = pl = 0,36 \cdot 10 = 3,6$. Les réactions sont dans les deux cas considérés : $A = oa = B = ob = 2,16$. La force agissant en m a pour valeur : $oc = 1,50$; celle agissant en n est horizontale et a la même intensité que la tension horizontale, c'est-à-dire $od = 1,2 = H$.

Quant aux efforts $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ et $\gamma\delta$ (fig. 143), ils ont les mêmes valeurs $oa = 2,16$, $oc = 1,50$, $od = 1,2$.

Poutres en forme de parabole du troisième degré.

La forme correspondant à la surcharge représentée par la surface ombrée $qrstuv$ (Pl. X, fig. 146) peut se déterminer ainsi qu'il suit. Partageons la surface qvu par exemple en quatre divisions égales. A chaque surface élémentaire correspond une charge que nous pourrions considérer comme agissant en son centre de gravité. Nous obtiendrons ainsi la valeur des forces 1,2,3,4, et nous pourrions au moyen du polygone des forces oai construire le polygone funiculaire $\alpha\beta\gamma\delta\eta v$ correspondant à la moitié de la poutre. Pour obtenir les appuis de la poutre considérée au même niveau, nous prendrons le pôle o à égale distance des points a et i . Nous déterminerons par une simple projection le polygone funiculaire correspondant à la seconde moitié. Ce polygone funiculaire enveloppe la courbe déterminant la forme de la poutre. Projetant alors les points de division sur ce polygone, nous trouverons en α, s, t, u, v autant de points de tangence ; ces points joints entre eux par une courbe continue déterminent la courbe cherchée qui, pour plus de clarté, n'a été tracée que sur la droite de l'épure.

Pour trouver la loi de la courbe ainsi déterminée, considérons la surface $\alpha stuvim\alpha$. Cette surface n'est autre que la surface des moments correspondant à la surcharge et aux composantes verticales des réactions, qui sont égales entre elles et de plus égales

à la moitié de la charge totale. Le moment des forces verticales correspondant à une section menée par le milieu de la poutre aura pour expression :

$$M = mv \cdot H = f \cdot H.$$

Nous pourrions encore exprimer ce moment d'une autre manière, savoir au moyen de la composante verticale de la réaction, et de la résultante des forces extérieures représentée par la surface vqu . Si nous représentons la ligne qv par n et la ligne qu par l , la composante verticale de la réaction aura pour valeur :

$$V = \frac{n \cdot l}{2},$$

et son moment pris par rapport à la section vm :

$$V \cdot l = \frac{n \cdot l}{2} \cdot l = \frac{n \cdot l^2}{2}$$

Quant à la résultante des forces représentée par la surface quv , elle est égale à $\frac{nl}{2}$ et agit au centre de gravité du triangle quv , c'est-à-dire à une distance $\frac{2}{3}l$ de la section considérée. Le moment de cette résultante sera donc :

$$- \frac{n \cdot l}{2} \cdot \frac{2l}{3} = - \frac{n \cdot l^2}{3}$$

La somme des moments cherchés sera par suite :

$$M = f \cdot H = \frac{n \cdot l^2}{2} - \frac{nl^2}{3} = \frac{nl^2}{6} \quad (1)$$

d'où la grandeur de la tension horizontale :

$$H = \frac{n \cdot l^2}{6 \cdot f} \quad (2)$$

Pour une autre section sq menée à une distance x du milieu de la poutre, le moment des forces extérieures sera donné par la formule :

$$M = y' \cdot H$$

Exprimons encore ce moment au moyen de la composante verticale de la réaction et de la résultante des forces verticales. La composante verticale de la réaction aura pour valeur V et son bras de levier sera $l-x$, d'où son moment :

$$V(l-x) = \frac{n \cdot l}{2} (l-x) = \frac{n \cdot l^2}{2} - \frac{n \cdot l \cdot x}{2}$$

Quant au moment de la résultante correspondant à la charge $l-x$, nous l'obtiendrons le plus facilement en le considérant comme la différence des moments correspondant à la demi-charge et à la charge x , ces moments étant pris par rapport à la section sq sous la demi-charge. La distance de la résultante $\frac{nl}{2}$ à la section sq est égale à $\frac{2}{3}l - x$; d'où son moment :

$$- \frac{n \cdot l}{2} \left(\frac{2}{3}l - x \right)$$

La résultante correspondant à la charge x , est donnée par la surface du triangle zzu , et par suite égale à $\frac{zx \cdot x}{2}$ ou encore à $\frac{n \cdot x \cdot x}{l \cdot 2}$ puisque nous avons $zx = \frac{nx}{l}$. Son bras de levier étant $\frac{1}{3}x$, son moment sera :

$$- \frac{n \cdot x \cdot x}{l} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \frac{n \cdot x^3}{l}$$

La somme des moments des forces extérieures à la section sq aura donc pour expression :

$$\begin{aligned} M' = y' \cdot H &= \frac{n \cdot l}{2} (l-x) - \left\{ \frac{n \cdot l}{2} \left(\frac{2}{3}l - x \right) - \frac{nx^3}{6l} \right\} \\ &= \frac{nl^2}{6} - \frac{nx^3}{6l} \end{aligned}$$

D'où la tension horizontale :

$$H = \frac{1}{y'} \left(\frac{n \cdot l^2}{6} - \frac{n \cdot x^3}{6 \cdot l} \right) \quad (3)$$

Egalons les deux équations (2) et (3), et tirons la valeur de y' ; nous aurons :

$$y' = f - f \cdot \frac{x^3}{l^3}$$

valeur représentant l'ordonnée de la courbe rapportée au point m , cette même valeur rapportée au point v sera :

$$y = f - y' = f \cdot \frac{x^3}{l^3}$$

Cette équation est celle d'une parabole du troisième degré, nous pourrions donc conclure que la courbe ainsi déterminée est une parabole du troisième degré.

La valeur de f tirée de la formule (1) sera :

$$f = \frac{\frac{1}{6} n \cdot l^2}{H} \quad (4)$$

Si nous supposons la surcharge $qstuv$ répartie uniformément sur la projection horizontale de la poutre, la hauteur du rectangle représentant cette charge sera $\frac{qv}{2}$ ou $\frac{n}{2}$; et la flèche f' de la parabole correspondant à cette surcharge :

$$f' = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{n}{2} \cdot l^2}{H}$$

Si nous posons en outre $\frac{n}{2} = p$, la flèche f' aura pour expression :

$$f' = \frac{1}{2} \frac{p \cdot l^2}{H}$$

f' sera donc égale à la moitié de la sous-tangente mn . Remplaçant $\frac{n}{2}$ par sa valeur p dans la formule (4), nous aurons :

$$f = \frac{\frac{2}{6} pl^2}{H} \quad (5)$$

f est alors égal au tiers de la même sous-tangente mn . La valeur $f = m v = \frac{1}{3} mn = \frac{2}{3} mv$ pourra se construire facilement, et nous saurons déterminer les flèches correspondant aux différentes tensions horizontales H . Réciproquement nous trouverons la tension horizontale H pour une valeur donnée de la flèche f .

Pour un point quelconque de la poutre le rayon mené dans le polygone des forces parallèlement à la tangente en ce point détermine en grandeur et en direction la résultante des forces extérieures à la section considérée. Ainsi en t agira la force oc et en v la force $oe = H$.

Dans l'exemple traité (Pl. X, fig. 147), la surcharge agissant sur la poutre est représentée par la surface ombrée, et est supposée concentrée aux centres de gravité des divisions 1,2,3,4. La forme correspondante de la poutre est déjà indiquée (fig. 146), par le polygone enveloppe, elle a pour flèche $f = \frac{1}{3} \cdot mn$. Les forces agissant dans chaque élément sont déterminées par les rayons du polygone des forces parallèles aux tangentes correspondantes.

Dans l'exemple indiqué (Pl. X, fig. 145, 146 et 147) les appuis se trouvent à un écartement $2l = 10^m$; la surface ombrée a les dimensions suivantes: $qu = l = 5^m$; $qv = n = 1^m,2$. La demi-charge ou bien la composante verticale de la réaction sera :

$$V = \frac{1}{2} n \cdot l = \frac{1}{2} 1,2 \cdot 5 = 3^t.$$

A chaque mètre carré correspond en effet une charge de 1^t .

Quant aux forces 1, 2, 3, 4, elles ont pour valeurs :

$$\begin{aligned} 1 = ab &= 1^t,31 ; 2 = bc = 0^t,94 ; \\ 3 = cd &= 0^t,56 ; 4 = de = 0^t,19 ; \end{aligned}$$

Prenons la hauteur de la poutre $f = 3^m,333$ et portons en mn la longueur $3f = 10^m$. Nous déterminerons la valeur de la tension horizontale H en menant dans le polygone des forces par les points a et i des parallèles à na et à ni . Cette valeur sera $H = 1^t,5$.

Si nous avons au contraire supposé H connu, nous aurions construit la valeur de f et trouvé $f = \frac{1}{3} mn$.

Nous pourrions aussi déterminer ces valeurs au moyen de la formule (5). Faisons dans cette équation $p = \frac{n}{2} = 0^t,6$, nous trouverons : $f = \frac{2}{6} \frac{p \cdot l^2}{H} = \frac{2 \cdot 0,6 \cdot 5^2}{6 \cdot 1,5} = \frac{30}{9} = 3^m,333$.

ou bien encore :

$$H = \frac{2 pl^2}{6 f} = \frac{2 \cdot 0,6 \cdot 5^2}{6 \cdot 3,333} = \frac{30}{20} = 1^t,5.$$

Quant aux efforts correspondant aux points α, s, t, v, u, v , ils sont :

$$\begin{aligned} oa &= 3^t,35 ; ob = 2^t,26 ; oc = 1^t,68 \\ od &= 1^t,51 ; oe = 1^t,50 = H. \end{aligned}$$

Nous trouverons les mêmes valeurs pour les forces développées dans les éléments de la poutre figurée. (Pl. X, fig. 147).

Les éléments constituant les poutres ci-dessus sont tous soumis, comme nous pouvons le voir à la simple inspection des polygones des forces, à des efforts de compression.

Supposons maintenant chaque poutre tournant autour d'un axe horizontal situé dans son plan, et d'un angle de 180° , les nouvelles constructions ainsi obtenues seront symétriques des premières; les forces extérieures à chaque élément conserveront la même intensité mais changeront de signe. Il en sera de même pour les forces intérieures; les efforts de compression se changeront donc en efforts de tension. Les premiers types d'ouvrages considérés sont assimilables à des poutres en arc; les seconds, à des poutres à chaînette.

POUTRES DANS LESQUELLES UNE SECTION QUELCONQUE

NE RENCONTRE QUE DEUX ÉLÉMENTS

TRAVAILLANT A LA TENSION OU A LA COMPRESSION.

Cas général.

Un corps de forme quelconque, soumis à l'action de forces agissant dans le même plan, pourra toujours, dans une section considérée, être remplacé par deux éléments rectilignes. Posons-nous de plus comme condition que chaque élément ne doit supporter que des efforts de tension ou de compression, la position de ces éléments se trouvera par suite déterminée; leurs axes devront se confondre avec les composantes de la force extérieure à la section considérée. Dans ce cas, la force extérieure se décomposera suivant les axes des deux éléments.

Soit par exemple, un corps de forme quelconque (Pl. X, fig. 148) soumis à l'action des forces 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 agissant dans un même plan. Considérons une section $\alpha_1\alpha_1$; nous pourrions dans cette section substituer à la matière du corps les deux éléments ab et cd dont les axes se coupent en un point α_1 de la direction de la résultante R_{α_1} , correspondant à la section $\alpha_1\alpha_1$. Les condi-

tions de l'équilibre ne seront nullement changées. Il en sera de même pour toute autre section xx .

La résultante des forces 1,2,8 situées à gauche de la section x_2x_2 est Rx_2 ; nous pourrons dans cette section substituer à la matière du corps les deux éléments (barres rigides) df et ab , dont les axes se coupent en un point α_2 située sur la résultante Rx_2 . Il en sera de même pour les forces 1,2,3,8 agissant à gauche de la section x_3x_3 . Leur résultante est Rx_3 . La matière du corps pourra dans cette section être remplacée par les deux éléments df et be , dont les axes se coupent en un point α_3 de la résultante Rx_3 .

A gauche de la section x_4x_4 se trouve seulement la force 1; les deux éléments ca et cd devront nécessairement se couper en un point α_4 situé sur la force 1, et nous pourrons considérer ce point d'application α_4 de la force 1 comme l'un des appuis du corps.

En opérant ainsi sur chaque section, nous remplacerons le corps donné par une poutre dont les éléments ne travailleront qu'à la traction ou à la compression.

Si les forces considérées conservent toutes la même intensité, ou bien encore si elles varient toutes dans un certain rapport; si de plus ces forces en changeant de direction et d'intensité varient de telle façon que les résultantes correspondantes tournent autour de points fixes (dans notre cas, autour des points $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \alpha_4$); la poutre ainsi déterminée ne sera en aucun cas soumise à un effort de flexion.

Dans la construction on emploie souvent des poutres de ce genre, et surtout dans le cas de surcharge symétrique.

Forme de poutre correspondant à une charge symétrique.

Les poutres à deux éléments représentées (Pl. X, fig. 150, 152, 153, 155, 157, 158) peuvent se ramener aux poutres à un seul élément auxquelles nous aurons à ajouter simplement l'élément $\alpha\beta$, capable de résister à la composante horizontale de la réac-

tion. Les réactions des appuis des nouvelles poutres seront verticales et les efforts développés dans chacun de leurs éléments seront en tous points identiques à ceux développés dans les poutres à un seul élément de même forme ; ils auront même grandeur et même direction, l'élément horizontal sera seul tendu.

La forme la plus simple des poutres rentrant dans cette catégorie est indiquée (Pl. X, fig. 150). Au point γ agit la force 1. Pour déterminer la valeur des efforts agissant dans les différents éléments, portons en ab la force 1 (Pl. X, fig. 149) ; menons par a une parallèle à $\alpha\gamma$ et par b une parallèle à $\beta\gamma$. Ces parallèles se coupent en un point o . Les longueurs oa et ob donnent la valeur des efforts dans les éléments $\alpha\gamma$ et $\beta\gamma$, qui sont comprimés, ce qui se voit clairement dans le polygone des forces. Quant à l'élément $\alpha\beta$, il doit résister à la composante horizontale de la réaction qui se produirait si la poutre se composait simplement des éléments $\alpha\gamma$ et $\gamma\beta$. L'élément $\alpha\beta$ sera donc tendu et la valeur de cette tension est donnée par la droite $H=oc$. La force 1 agissant au milieu de l'ouverture de la poutre, les réactions verticales des appuis seront égales entre elles et auront pour valeur :

$$A = ac = B = cb.$$

Nous aurons de plus :

$$A + B = ac + cb = ab = 1.$$

Dans l'exemple traité (Pl. X, fig. 149 et 150), nous avons pris :

$$l = 8^m \text{ et } 1 = 2^t.$$

Les éléments $\alpha\gamma$ et $\gamma\beta$ sont comprimés, l'élément $\alpha\beta$ est tendu. Les valeurs numériques de ces efforts sont données par les droites $oa = ob = 1^t,67$ et par la droite $oc = 1^t,34$.

Pour distinguer dans nos constructions les éléments tendus des éléments comprimés, nous indiquerons toujours ces derniers par un double trait, et nous ferons toujours précéder leurs valeurs numériques du signe —.

Soit la poutre représentée (Pl. X, fig. 152) ; nous voulons déterminer les efforts agissant dans chacun des éléments qui la composent. Pour cela, portons (Pl. X, fig. 151) sur une verticale

ab la charge totale $1 + 2 = ac + cb$. Menons par a une parallèle à $\alpha\gamma$, par b une parallèle à $\delta\beta$ et par leur point d'intersection o une parallèle à $\gamma\delta$. Les longueurs ainsi déterminées oa , oc , ob donnent l'intensité des efforts de compression dans les éléments $\alpha\gamma$, $\gamma\delta$, $\delta\beta$. Quant à la tension développée dans $\alpha\beta$, elle a également pour valeur la droite oc , c'est-à-dire qu'elle est de même intensité que la compression $\gamma\delta$.

Dans l'exemple traité (Pl. X, fig. 152 et 151) la poutre a une ouverture $l = 8^m$; les charges sont :

$$1 = ac = 2 = bc = 1^t,0.$$

Les efforts, qui agissent dans les éléments $\alpha\gamma$, $\gamma\delta$, $\delta\beta$, $\alpha\beta$ sont d'après la figure 151 :

$$oa = - 1^t,67 ; oc = - 1^t,34 ; ob = - 1^t,67 ; oc = 1^t,34.$$

Lorsque dans une poutre du type représenté (Pl. X, fig. 153), les charges n'agissent point aux points supérieurs γ , δ , mais aux points inférieurs ν , η , il faudra alors adopter aux points γ et δ des tiges de suspension $\gamma\nu$ et $\delta\eta$, capables de transmettre les charges 1 et 2 des points ν et η aux points γ et δ , puisque l'élément $\alpha\beta$ ne doit pas être soumis à un moment de flexion. Les efforts, qui agissent dans les différents éléments de la poutre, conservent même valeur et même signe. Quant aux tiges $\nu\gamma$ et $\eta\delta$, elles résistent aux efforts de traction 1 et 2.

On désigne en général ces sortes de poutres sous le nom de *poutres à armature supérieure*.

La poutre représentée (Pl. X, fig. 157) peut être considérée comme symétrique de la poutre (fig. 152), l'axe de symétrie étant $\alpha\beta$. Les éléments $\alpha\gamma$, $\gamma\delta$, $\delta\beta$ forment une chaîne, dont la tension horizontale engendre dans $\alpha\beta$ un effort de compression. Pour déterminer les efforts dans les éléments $\alpha\gamma$, $\gamma\delta$, $\delta\beta$, nous porterons en ab (fig. 156) les forces $1 = ac$ et $2 = cb$. Nous mènerons par a une parallèle à $\alpha\gamma$, par b une parallèle à $\delta\beta$, et nous les prolongerons jusqu'à leur point de rencontre en o . Puis par ce point o , nous mènerons une parallèle à $\gamma\delta$. Les rayons ainsi obten-

nus oa , ob , oc donnent en grandeur et en direction les efforts agissant dans les éléments $\alpha\gamma$, $\delta\beta$, $\gamma\delta$. Quant à l'effort de compression $\alpha\beta$, il se trouve également déterminé par la grandeur oc .

Dans la poutre à armature inférieure désignée généralement sous le nom de poutre armée (Pl. X, fig. 158), les charges 1 et 2 n'agissent pas aux points γ et δ , mais aux points ν et η de l'élément $\alpha\beta$. Or comme cet élément $\alpha\beta$ ne doit pas travailler à la flexion, il nous faudra alors reporter l'action des forces 1 et 2 aux points ν et η au moyen des poteaux $\nu\gamma$ et $\eta\delta$. Ces poteaux seront comprimés et les efforts développés dans les autres éléments de la poutre conserveront leurs signes.

Dans l'exemple traité (Pl. X, fig. 157 et 158), nous avons pris une poutre de 10^m d'ouverture sur laquelle agissent les forces 1 = ac = 2 = bc = 1^t,00. Les efforts développés dans les éléments $\alpha\gamma$, $\gamma\delta$, $\delta\eta$, $\alpha\beta$ sont donnés par les rayons de la figure 156 :

$$oa = 4^t,08 : oc = 3^t,95 ; ob = 4^t,08 : oc = - 3^t,95.$$

Dans la poutre représentée (fig. 158), nous avons en plus dans les poteaux $\nu\gamma$ et $\eta\delta$ les efforts de compression :

$$ac = - 1^t,00 ; bc = - 1^t,00.$$

Une poutre de construction analogue se trouve indiqué (Pl. X, fig. 155). Dans cette poutre, la force 1 est directement transmise au point γ , par l'intermédiaire du poteau $\delta\gamma$. Si nous portons (fig. 154) $ab = 1$, et si par les points a et b nous menons des parallèles ao et bo aux côtés $\alpha\gamma$ et $\beta\gamma$, si de plus nous menons par o une parallèle oc à $\alpha\beta$, nous obtiendrons en oa, ob, oc, ab les efforts agissant dans les éléments de la poutre $\alpha\gamma, \gamma\beta, \alpha\beta$ et $\gamma\delta$.

La poutre figurée (Pl. X, fig. 153) a une ouverture de 10^m,0 et supporte la force 1 = ab = 1^t,5. Les efforts agissant dans les éléments $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$, $\alpha\beta$ et $\gamma\delta$ sont donnés en grandeur et en direction par les rayons :

$$oa = 4^t,63 ; ob = 4^t,63 ; oc = - 4^t,57 ; ab = - 1^t,5.$$

Les réactions des appuis ont pour valeur :

$$A = ac = B = bc = 0^t,73.$$

Poutre parabolique avec tirant.

Si, dans une poutre parabolique simple, nous annulons la composante horizontale de la réaction des appuis au moyen d'un tirant passant par les points d'appuis, nous aurons alors une poutre parabolique à deux éléments, ou autrement dit, une poutre parabolique avec tirant. Cette poutre se trouvera en équilibre sous l'action seule des réactions verticales. Une poutre parabolique de ce genre se trouve indiquée (Pl. X, fig. 160) et sa forme correspond à une charge uniformément répartie par mètre courant de projection horizontale. Nous avons déterminé la forme de cette poutre, comme nous l'avons fait plus haut, au moyen du polygone des forces (fig. 159) et en supposant connue la flèche f . Le tirant horizontal $\alpha\beta$ est soumis à la tension horizontale constante $H = oc$. Quant à l'effort correspondant à un point quelconque de la courbe $\alpha\gamma\beta$, il se trouve déterminé dans le polygone des forces par le rayon parallèle à la tangente en ce point : ainsi au point α , agira la force oa ; au point β , la force ob ; au point γ , la force $oc = H$.

Dans l'exemple (fig. 160), la poutre a une ouverture $l = 12^m,00$; une flèche $f = 2^m,70$; elle supporte par mètre courant de projection horizontale une charge uniformément répartie $p = 0^t,3$. La formule $fH = \frac{1}{8} pl^2$, nous donne la valeur de la tension horizontale H .

$$H = \frac{1}{8} \frac{0^t,3 \cdot 13^2}{2,7} = 2^t,00.$$

Aux points α et β agit l'effort de compression $oa = - 2^t,69$, au point γ ; $oc = H = - 2^t,00$. Quant au tirant $\alpha\beta$, il supporte une tension $oc = H = 2^t$.

Dans la pratique, on emploie souvent des poutres paraboliques à tirant non seulement dans le cas de charges uniformément réparties par mètre courant de projection horizontale, mais encore dans le cas de charges concentrées et de même intensité. Une poutre de ce genre se trouve représentée (Pl. X, fig. 162). Sur cette poutre la charge uniformément répartie $pl = ab$ se transmet seulement aux points $\gamma, \delta, \eta, \tau, \lambda, \nu, \sigma$; également distants

d'une longueur a . Les forces 1,2,3,4,5,6,7 sont donc égales entre elles, et les réactions A et B se trouvent à une distance $\frac{a}{2}$ des forces voisines 1 et 7. Pour déterminer la forme la plus convenable à donner à cette poutre sous l'action de la charge considérée, divisons dans le triangle des forces $ab = pl$ (Fig. 161), la longueur ab en autant de parties égales que nous avons pris de points, où se concentre la charge. Choisissons de plus une tension horizontale $H = oc$, telle que le pôle o soit équidistant des points a et b et construisons le polygone funiculaire $\alpha\gamma\delta\eta\tau\lambda\nu\sigma\beta$. Ce polygone nous donnera la forme cherchée. Cette poutre aura pour hauteur la flèche de la parabole correspondante seulement dans le cas où le polygone funiculaire aura son côté milieu horizontal. La hauteur f sera égale à $\frac{mn}{2}$ et pourra se calculer directement par la formule

$$f = \frac{\frac{1}{8}pl^2}{H}.$$

Dans notre cas la hauteur de la poutre f' se trouve être un peu plus grande que $\frac{1}{2} mn$.

L'élément $\alpha\beta$ supporte un effort de tension $H = oc$. Quant aux efforts agissant dans les autres éléments, il sont donnés en grandeur et en direction par les rayons du polygone des forces correspondants; ainsi dans $\alpha\gamma$ agira la force oa ; dans $\delta\eta$, la force oe , etc. Plus la poutre sera haute, plus la tension horizontale H sera faible.

Dans l'exemple (Pl. X, fig. 161 et 162), nous avons pris $l = 12^m,0$ et $p = 0^t,3$; les forces seront donc: $1 = 2 = 3 = 4 = 5 = 6 = 7 = 0^t,514$. Nous avons de plus fait $H = 3^t,0$, d'où la valeur de f :

$$f = \frac{\frac{1}{8}pl^2}{H} = \frac{mn}{2} = \frac{0,3}{8} \frac{144}{3} = 1^m,8.$$

La hauteur de la poutre f' correspondant aux charges concentrées est un peu plus grande, comme nous le remarquons en la

mesurant directement sur l'épure. Mais nous pourrions également calculer cette valeur f' en prenant la somme des moments extérieurs à la section mn . Nous avons en effet :

$$f' \cdot H = M_{mn}$$

d'où :

$$f' = \frac{M_{mn}}{H}$$

Or le moment M_{mn} a pour valeur :

$$M_{m. n} = A.l \left\{ (1). 3a + (2). 2a + (3). a \right\}$$

ou bien encore, puisque $(1) = (2) = (3)$:

$$M_{mn} = A.l - (1). 6.a$$

Remplaçons les lettres par leurs valeurs :

$$A = \frac{p.l}{2} = 1^t,8 ; a = \frac{l}{7} = 1^m,714 ; l = 0^t,514$$

nous aurons :

$$M_{mn} = 1^t,8 \cdot 6^m - 0^t,514 \cdot 10^m,254 = 5^m,514.$$

D'où la valeur de la flèche f' :

$$f' = \frac{5^m,514}{3^t} = 1^m,838.$$

Les réactions verticales sont : $A = B = 1^t,8$;

les éléments $\alpha\gamma$ et $\sigma\beta$, supportent un effort de compression :

$oa = ob = - 3^t,50$, et le tirant $\alpha\beta$ une tension $oc = H = 3^t,00$.

Dans la poutre (Pl. X, fig. 163) les charges 1,2,3,4,5,6,7 sont appliquées sur le tirant $\alpha\beta$. Mais comme ce tirant ne doit pas travailler à la flexion, il nous faudra reporter ces efforts sur les nœuds supérieurs de la poutre au moyen de tiges de suspension. Chacune de ces tiges supportera alors un effort déterminé égal à la charge qui s'y concentre. Quant aux efforts développés dans la poutre par les charges considérées, ils auront même valeur que ceux trouvés plus haut (fig. 162).

La poutre représentée (Pl. X, fig. 165) peut être considérée comme symétrique de la poutre (fig. 162). Cette poutre est formée par une chaîne sur laquelle agissent les poids 1,2,3,4,5,6,7, dont l'effort de compression horizontale passe par l'élément $\alpha\beta$. C'est au moyen du polygone des forces (fig. 164) et de la distance polaire H que nous avons déterminé la forme de cette poutre.

L'élément $\alpha\beta$ est comprimé par la force $H = oc$; tous les autres éléments sont tendus ; ainsi dans l'élément $\gamma\delta$ agit l'effort de tension od , etc.... Les réactions des appuis sont données par $A = ac = B = cb$.

Dans l'exemple traité (Pl. X, fig. 164 et 165), la poutre a une portée $l = 12^m,00$; elle supporte une charge uniformément répartie par mètre courant de projection $p = 0^t,25$, qui se concentre aux points 1,2,3,4,5,6,7. La charge totale a pour valeur : $ab = pl = 3^t,0$ et chacune des forces concentrées : $\frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = p.l}{7} = 0^t,428$.

Nous avons pris $H = 3^t,0$ comme distance polaire ; d'où la grandeur de f correspondant à la charge uniformément répartie :

$$f = \frac{1}{8} pl^2 = 1^m,5.$$

Quant à la hauteur de la poutre, elle est, sous l'action des charges concentrées : $f' = 1^m,527$.

Les réactions verticales ont pour valeur : $A = ac = B = cb = 1^t,5$.

L'élément $\alpha\beta$ se trouve comprimé sous une force $H = oc = -3^t,0$. Dans l'élément $\alpha\gamma$ agit une tension $ao = 3^t,35$ etc.

La poutre (Pl. X, fig. 166) diffère de la précédente en ce que les charges 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, agissent sur l'élément $\alpha\beta$ et de là se transmettent à la chaînette par l'intermédiaire de poteaux, l'élément $\alpha\beta$ ne devant pas travailler à la flexion. Les poteaux seront alors comprimés : quant aux efforts développés dans les autres éléments ils auront mêmes valeurs et mêmes signes que dans le cas précédent.

La poutre figurée (Pl. XI, fig. 169) est constituée par la réunion de deux poutres paraboliques, dont l'une agit comme arc et l'autre comme poutre à chaînette. Soient p_1 et p_2 les charges uniformément réparties par mètre courant de projection horizontale sur l'arc et sur la chaînette. Ces charges se transmettent à la poutre en huit points (nœuds) également distants. Pour déterminer les efforts agissant dans chaque élément, formons le polygone funiculaire correspondant et, pour cela, portons (fig. 167) en ab les forces 1,2,3,4,5,6,7,8 et (fig. 168) en $a'b'$ les forces 1',2',3',4',5',6',7',8'. Menons par les points ab et $a'b'$ des parallèles aux éléments extrêmes des deux poutres réunies. Les dis-

tances polaires de ces deux polygones représenteront les composantes horizontales des réactions sollicitant chaque poutre. Quant à leurs composantes verticales, leurs sommes se trouveront représentées par les longueurs ab et $a'b'$.

La composante horizontale de la réaction de la poutre supérieure est donnée par la formule :

$$f_1 \cdot H_1 = \frac{1}{8} p_1 \cdot l^2$$

d'où :

$$H_1 = \frac{\frac{1}{8} p_1 \cdot l^2}{f_1}$$

Celle de la poutre inférieure sera :

$$H_2 = \frac{\frac{1}{8} p_2 \cdot l^2}{f_2}$$

Ces deux composantes seront donc égales, quand nous aurons la relation :

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{f_1}{f_2}$$

c'est-à-dire quand les intensités des charges uniformément réparties p_1 et p_2 seront dans le même rapport, que les flèches des deux poutres. Dans ce cas les tensions horizontales se feront équilibre et les réactions des appuis seront par suite verticales.

Les réactions des appuis sont : pour la poutre supérieure $A_1 = B_1 = ac = bc = p_1 \frac{l}{2}$, pour la poutre inférieure $A_2 = B_2 = p_2 \frac{l}{2}$ et pour les deux poutres réunies :

$$A = B = A_1 + A_2 = B_1 + B_2 = (p_1 + p_2) \frac{l}{2}.$$

Quant aux efforts développés dans les différents éléments, nous les trouverons en grandeur et en direction dans le polygone des forces (fig. 167) pour la poutre supérieure et dans le polygone (fig. 168) pour la poutre inférieure, en menant les rayons parallèles aux éléments correspondants. Tous les éléments de la poutre

supérieure seront comprimés ; ceux de la poutre inférieure seront tendus.

Dans l'exemple (Pl. XI, fig. 169) la poutre a une portée de 12^m ; ses flèches sont $f_1 = 1^m,8$ $f_2 = 1^m,5$. Quant aux charges uniformément réparties, elles sont par mètre courant de projection horizontale, $p_1 = 0^t,3$; $p_2 = 0^t,25$. Les flèches étant dans le même rapport que les charges, c'est-à-dire $\frac{p_1}{p_2} = \frac{f_1}{f_2} = \frac{6}{5}$, il s'en suit la relation $H_1 = H_2$; ces tensions mesurées directement dans les polygones des forces $1 = 2 = 3 = 4 = 5 = 6 = 7 = 8 = 0^t,45$ et $1' = 2' = 3' = 4' = 5' = 6' = 7' = 8' = 0^t,375$, sont $H_1 = H_2 = 3^t,00$. La valeur de ces tensions horizontales tirées de l'équation

$$H_1 = H_2 = \frac{\frac{1}{8} p_1 l^2}{f_1} = \frac{\frac{1}{8} p_2 l^2}{f_2}$$

sera également :

$$H_1 = H_2 = \frac{1}{8} \cdot \frac{0,3 \cdot 144}{1,8} = \frac{1}{8} \cdot \frac{0,25 \cdot 144}{1,5} = 3^t,00.$$

Les réactions des appuis sont verticales et égales à :

$$A = B = \frac{l}{2} (p_1 + p_2) = 6 \cdot 0,55 = 3^t,30.$$

De plus nous avons $oa = ob = -3^t,5$ et $o'a' = o'b' = 3^t,5$ etc.

Si les deux charges p_1 et p_2 sont de même intensité, nous aurons la relation :

$$\frac{H_2}{H_1} = \frac{f_1}{f_2}$$

c'est-à-dire les tensions horizontales seront inversement proportionnelles aux valeurs des flèches des deux poutres.

Supposons que dans la poutre représentée (Pl. XI, fig. 172) dont les flèches f_1 et f_2 sont égales, la surcharge s'applique directement aux nœuds supérieurs, et supposons de plus que cette surcharge se transmette par moitié sur les deux poutres par l'intermédiaire des poteaux verticaux. Nous aurons alors $p_1 = p_2$, et par conséquent $H_1 = H_2$.

Le polygone des forces (fig. 170) correspondra à la poutre supérieure, et le polygone des forces (fig. 171) à la poutre inférieure. Tous les éléments de la première seront comprimés et

tous ceux de la seconde tendus. Les réactions des appuis seront verticales et auront pour valeur :

$$A = B = (p_1 + p_2) \frac{l}{2} = p_1 l = p_2 l.$$

Dans l'exemple traité fig. 172, nous avons pris :

$$l = 12^m,00 ; f = 0^m,9 ; p_1 = p_2 = 0^t,15 ; 1 = 2 = \dots = 8 = 0^t,225$$

et nous avons trouvé par construction :

$$H_1 = H_2 = H = 3^t,0 ; oa = ob = o' a' = o' b' = 3^t,13$$

$$A = B = p_1 \cdot l = 0^t,15 \cdot 12 = 1^t,8.$$

**Poutre parabolique avec tirant en forme de parabole
du troisième degré.**

La poutre (Pl. XI, fig. 174) est identique comme forme à la poutre représentée (Pl. X, fig. 147); elle porte de plus la même charge. Considérons cette poutre comme un arêtier d'une coupole à huit côtés. Ces huit arêtiers buttent l'un contre l'autre à leur sommet et sont reliés à leurs extrémités inférieures par une ceinture horizontale. (Voir le plan fig. 174). Cette ceinture horizontale annulant l'effet de la poussée horizontale, c'est-à-dire remplissant l'office d'un tirant, il s'en suit que la réaction sollicitant chaque arêtier sera verticale.

La force horizontale H est donnée par la distance polaire du polygone des forces, et peut être remplacée par ses deux composantes H' et H' agissant suivant les éléments de la ceinture extérieure. Nous obtiendrons donc les valeurs de H' en décomposant la force H = oc suivant od et cd. Quant aux efforts de compression agissant dans les différents éléments de la poutre, nous les déterminerons dans le polygone des forces oab.

Ayant conservé dans l'exemple traité (Pl. X, fig. 173, 174 et 174 a) les mêmes dimensions et les mêmes charges que dans le cas figuré Pl. X, fig. 147, à l'exception de la ceinture horizontale, il s'en suit que les forces agissant dans les différents éléments conserveront la même intensité. Quant à la tension de la ceinture, elle est $H' = od = dc = 2^t,83$.

**Poutres composées de deux éléments supportées
à une seule extrémité.**

Les poutres (Pl. XI, fig. 175, 177, 179 et 181) supportées à une de leurs extrémités, sont fréquemment employées dans la construction métallique, comme supports de balcons, fermes de marquises, etc... En décomposant la charge que porte chacune d'elles (nous avons pris ici pour toutes la même charge, afin de rendre les résultats plus facilement comparables) suivant deux directions parallèles aux éléments qui la composent, nous trouverons les forces agissant dans chaque élément. (Fig. 176, 178, 180, 182).

Considérons (fig. 175) une section quelconque xx et cherchons les valeurs des efforts $\alpha\beta$ et $\alpha\gamma$. Pour cela, nous nous reporterons au polygone des forces (fig. 176) et nous verrons que l'élément supérieur $\alpha\beta$ sera tendu et l'élément inférieur $\alpha\gamma$ comprimé. Il en est de même pour toutes les autres poutres.

Nous avons pris pour les quatre poutres :

$$b = 5^m,0 \text{ et } l = 1^t,20$$

nous avons construit les polygones des forces correspondant à chacune d'elles et nous avons trouvé pour l'élément $\alpha\gamma$ un effort de compression oa et pour l'élément $\alpha\beta$ un effort de tension ob .

Ces efforts ont dans chaque cas considéré les valeurs suivantes :

$$\text{(Fig. 175 et 176) } oa = -3^t,23; ob = 3^t,00$$

$$\text{(Fig. 177 et 178) } oa = -3^t,00; ob = 3^t,23$$

$$\text{(Fig. 179 et 180) } oa = -2^t,57; ob = 2^t,57$$

$$\text{(Fig. 181 et 182) } oa = -3^t,06; ob = 2^t,56.$$

POUTRES DANS LESQUELLES UNE SECTION RENCONTRE

TROIS OU PLUSIEURS ÉLÉMENTS NE TRAVAILLANT QU'À LA

TENSION OU À LA COMPRESSION.

Cas général.

Considérons de nouveau un corps de forme quelconque (Pl. XI, fig. 183). Les forces 1, 2, 37, 8 auxquelles il se trouve soumis agissent toutes dans le même plan et sont en équilibre. Nous pour-

rons remplacer dans une section quelconque la matière de ce corps par trois éléments rectilignes (trois barres rigides) ne travaillant qu'à la flexion ou à la compression, puisque nous saurons toujours décomposer la résultante de toutes les forces extérieures à cette section suivant trois directions arbitraires. Ainsi nous pourrons remplacer la partie près de la section xx par les trois éléments ab , bc et cd , en décomposant la résultante R_x correspondant à cette section suivant les directions de ces trois éléments. Il en sera de même pour toute autre section du corps. Pour que cette substitution soit possible, il faudra que dans chaque section les axes de trois éléments se coupent sur la direction de la force extérieure la plus rapprochée ou bien autrement dit, il faudra, si la forme de la poutre est donnée, que les charges agissent aux points de rencontre des divers éléments, c'est-à-dire aux nœuds de la poutre. Cette considération nous a permis de construire la poutre indiquée en lignes pointillées (fig. 183), qui remplacera la forme primitive du corps. Une telle poutre pourra également résister, quand même les forces considérées varieraient d'intensité et de direction, tous ses éléments ne travailleront qu'à la tension ou à la compression (ce qui résulte de la construction même de la poutre). Les deux éléments limitant la poutre s'appellent les membrures de cette poutre et se divisent en membrure supérieure et inférieure. Quant aux éléments reliant entre elles les membrures, nous les désignerons sous le nom général de barres de treillis.

Les éléments constituant ce genre de poutres ne seront jamais soumis à des efforts de flexion, comme nous l'avons déjà fait remarquer plus haut, que lorsque les éléments seront rectilignes et lorsque les forces extérieures se concentreront aux nœuds de l'ouvrage.

En chaque nœud de la poutre se coupent plus de deux éléments ; seules les extrémités font exception et ne se composent que de deux éléments, suivant lesquels la résultante des forces extérieures correspondantes se décomposera directement.

Soient (Pl. XI, fig. 185) données en grandeur et en direction

les forces 2, 3, 4, 5, 6, 7, ainsi que les forces 1 et 8 qui leur font équilibre. Nous voulons construire entre les points α, π une poutre jouissant des propriétés énoncées ci-dessus. Choisissons la membrure supérieure entre les forces 1, 2, 4, 6, 8 et la membrure inférieure entre 5, 7, 8 ; joignons de plus entre eux les points où se concentrent les forces 2, 3, 4, 5, 6, 7 ; les derniers éléments, ainsi déterminés constitueront le treillis. Cette poutre résistera à l'action des forces considérées ; aucun de ses éléments ne travaillera à la flexion. Il nous reste à déterminer la valeur des efforts dans chaque élément, ce que nous pourrons faire et ce que nous ferons de plusieurs manières.

Construction des forces intérieures.

MÉTHODE DE M. CULMANN

Construisons le polygone des forces $oabcdefg$ (Pl. XI, fig. 184) et le polygone funiculaire $1\alpha\beta\gamma\delta\eta\nu\tau\pi 8$ (fig. 185) correspondant aux forces 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Menons à travers la poutre une section quelconque, qui ne coupe que trois éléments, et décomposons la résultante des forces extérieures à cette section suivant les axes des trois éléments considérés. Ces composantes prises en signe contraire donneront l'intensité des forces intérieures cherchées.

Ainsi la résultante des forces extérieures à la section xx , par exemple, est égale à la somme géométrique des forces 1, 2, 3, 4 et se trouve donnée en grandeur et en direction dans le polygone des forces par la droite $od = R_x$. Quant à sa position, elle est déterminée par le côté $\delta\eta$ du polygone funiculaire. Désignons par X, Z, U les forces intérieures développées dans les trois éléments coupés par la section considérée xx . Nous voulons déterminer les forces développées dans ces éléments. Prolongeons à cet effet le côté du polygone funiculaire suivant lequel agit R_x jusqu'en son point de rencontre m avec la composante X ; joignons ce point m au point d'intersection n des deux autres composantes Z et U et décomposons R_x suivant la direction X et suivant la droite mn . Cette décomposition s'opérera facilement dans le

polygone des forces, en menant par les extrémités o et d du rayon od une parallèle à X et une à mn . Les droites dp et op représentent les valeurs des composantes X et I . En changeant de suite le signe de ces composantes, nous obtiendrons directement les forces intérieures. Décomposons ensuite I suivant les éléments U et Z , nous aurons en pq et en qo les valeurs de ces composantes U et Z . Les forces intérieures X, U, Z tiennent en équilibre la force extérieure R_x . Quant à la nature de ces efforts, nous l'obtiendrons en les portant suivant leur direction à droite de la section considérée et en observant leur mode d'action sur la partie gauche de la poutre. Ainsi la force X sera un effort de compression, et les forces U et Z des efforts de tension.

En répétant la même construction, nous pourrions déterminer très rapidement tous les efforts agissant dans la poutre. Nous choisirons toujours les sections de telle manière qu'elles ne coupent que trois éléments de la poutre; toutefois les deux sections voisines des appuis n'en rencontreront que deux.

Dans l'exemple traité (Pl. XI, fig. 184 et 185), nous avons pris :

$$1 = 4^t,0; 2 = 1^t,0; 3 = 2^t,0; 4 = 0^t,8; 5 = 1^t,2; 6 = 0^t,6; 7 = 0^t,6.$$

et nous avons trouvé, en les construisant, les valeurs des efforts dans la section xx :

$$X = -3^t,78; Z = 0^t,29; U = 0^t,73.$$

MÉTHODE DE M. RITTER

Méthode des moments statiques.

PREMIER EXEMPLE

Nous savons que pour que plusieurs forces agissant dans un même plan soient en équilibre, il faut que la somme de leurs moments pris par rapport à un point quelconque de ce plan soit égale à zéro. Nous pourrions alors, pour toute section d'une poutre, établir l'équation des moments des forces agissant dans cette section, savoir la résultante des forces extérieures et les efforts intérieurs développés dans les trois éléments considérés. La recherche de ces moments se simplifiera beaucoup si nous avons soin de rap-

porter les moments aux points d'intersection de deux des forces intérieures inconnues, les moments de ces deux forces pris par rapport à ce point seront nuls et nous n'aurons plus alors qu'à poser l'égalité de deux moments ; savoir, celui de la force extérieure supposée connue et celui de la troisième force intérieure. De cette équation nous tirerons la valeur de l'effort à déterminer.

Ainsi, dans l'exemple (Pl. XI, fig. 187) la section $x_1 x_1$ rencontre les éléments X_1 , U_1 , Z . Pour déterminer la grandeur de X_1 , nous prendrons les moments par rapport au point d'intersection n des deux autres éléments U_1 et Z . Soit Rx_1 la résultante des forces extérieures, nous pourrons poser l'équation :

$$Rx_1 \cdot nt - X_1 \cdot nr + U_1 \cdot 0 + Z \cdot 0 = 0. \quad (1)$$

D'où :

$$X_1 = \frac{Rx_1 \cdot nt}{nr}.$$

Pour déterminer U_1 , nous rapporterons les moments au point d'intersection p des forces X_1 , et Z et nous aurons :

$$Rx_1 \cdot pq - U_1 \cdot pu + X_1 \cdot 0 + Z \cdot 0 = 0. \quad (2)$$

D'où :

$$U_1 = \frac{Rx_1 \cdot pq}{pu}.$$

Pour avoir la grandeur de Z , nous prendrons comme axe des moments le point d'intersection m des éléments U_1 et X_1 , et nous poserons :

$$Rx_1 \cdot mv - Z \cdot ms = 0. \quad (3)$$

D'où :

$$Z = \frac{Rx_1 \cdot mv}{ms}.$$

Les longueurs nt ; nr , pq ; pu ; mv ; ms sont les bras de levier des forces considérées par rapport aux points n , p , m .

Pour déterminer la nature des forces intérieures, il nous suffira de remarquer que le moment de la résultante R_x , est toujours de signe contraire à celui de l'autre force entrant dans l'une des

trois équations (1), (2), (3). Ainsi dans l'équation (1) le moment de Rx_1 pris par rapport au point n étant positif, celui de X_1 sera négatif; mais ce dernier ne peut être négatif que si la force X_1 a une direction conforme à celle indiquée par la flèche, l'élément considéré sera alors comprimé. Les moments de Rx_1 par rapport au point m et au point p sont positifs, les forces Z et U_1 seront donc des efforts de tension.

Nous avons gardé (fig. 187) la même forme de poutre, les mêmes charges et le même polygone funiculaire que dans le cas précédent. La résultante des forces extérieures n'étant pas connue en grandeur et en position, nous substituerons alors au moment de cette résultante la somme des moments de ses composantes.

Dans les exemples traités (Pl. XI, fig. 184, 185, 186 et 187), nous avons adopté les mêmes charges et dimensions, et nous aurons :

$$\begin{aligned} Rx_1 = oc &= 3^t,07; \quad nt = 4^m,5; \quad ms = 4^m,38 \\ pq &= 3^m,48; \quad nr = 3^m,12; \quad mv = 0^m,42; \quad pn = 5^m,75. \end{aligned}$$

Les valeurs de X_1 , U_1 , Z , sont données par les équations (1) (2) (3) et nous aurons :

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{R_{x_1} \cdot nt}{nr} = \frac{3^t,07 \cdot 4^m,5}{3^m,12} = -4^t,42. \\ U_1 &= \frac{R_{x_1} \cdot pq}{pu} = \frac{3^t,07 \cdot 3^m,48}{5^m,75} = 1^t,85. \\ Z &= \frac{R_{x_1} \cdot mv}{ms} = \frac{3^t,07 \cdot 0^m,42}{4^m,38} = {}^t,29. \end{aligned}$$

Nous nous servons surtout de cette méthode lorsqu'il s'agira de déterminer l'augmentation ou la diminution des forces intérieures qu'entraînerait dans un élément de la poutre une variation de la surcharge. Ainsi toutes les charges qui produiront une augmentation de la force extérieure Rx_1 et par suite de son moment, augmenteront en même temps la valeur des forces cherchées X_1 , U_1 , Z , le facteur Rx_1 se trouvant dans les équations (1) (2) (3) au numérateur. Mais, comme nous pouvons aussi le remarquer, l'intensité des efforts Z_1 , U_1 , Z , dépend de plus de la longueur du bras de levier correspondant, qui entre au dénominateur. Les

efforts X_1 , U_1 , Z , seront d'autant plus grands que l'intensité de la force extérieure R_{x_1} sera plus grande ; ils seront d'autant plus petits que leur bras de levier sera plus grand et réciproquement. Nous pourrions conclure des remarques ci-dessus que la forme de la poutre aussi bien que la grandeur des forces extérieures influeront sur la valeur et la nature des forces intérieures.

Dans l'exemple traité (Pl. XI, fig. 187), les points m , n , p étant tous situés au-dessous de la résultante R_{x_1} , son moment pris par rapport à l'un quelconque de ces trois points aura toujours le même signe. Mais si nous augmentons la hauteur de la poutre en laissant aux forces considérées la même intensité, une partie des points m , n , p se trouveront au-dessus de R_{x_1} , les moments correspondants seront négatifs et par suite les forces intérieures changeront de signe.

DEUXIÈME EXEMPLE

Sur la poutre figurée (Pl. XI, fig. 189) agissent seulement des forces verticales et de plus la partie de la membrure supérieure comprise dans les forces 1 et 3 est parallèle à la membrure inférieure. Nous voulons également appliquer à la recherche des efforts intérieurs la méthode des moments statiques.

Considérons la section xx , et rapportons aux points α et β les moments des efforts engendrés dans les éléments rencontrés par cette section, nous aurons : *les forces extérieures à la poutre de la section xx*

$$A \cdot a - Zt = 0$$

d'où :

$$Z = \frac{A \cdot a}{t}$$

De même nous pourrions écrire l'équation :

$$A \cdot 2a - (1) \cdot a - Xt = 0.$$

D'où nous tirerons la valeur de X :

$$X = \frac{A \cdot 2a - (1) \cdot a}{t}$$

Mais nous pourrions aussi construire le polygone des forces et le

polygone funiculaire correspondants, et par suite exprimer en fonction de l'ordonnée Y et de la distance polaire h l'équation des moments :

$$Y_{\alpha} \cdot h - Z \cdot t = 0.$$

D'où la valeur de Z :

$$Z = \frac{Y_{\alpha} \cdot h}{t}.$$

Nous aurons de même l'expression suivante :

$$Y_{\beta} \cdot h - X \cdot t = 0$$

D'où :

$$X = \frac{Y_{\beta} \cdot h}{t}.$$

La membrure supérieure sera comprimée et la membrure inférieure tendue, comme l'indique le signe du moment de la résultante R_x . De plus des équations relatées ci-dessus, nous pourrions conclure que, si dans une poutre les membrures supérieure et inférieure sont parallèles, la valeur des efforts développés dans ces membrures s'obtiendra en divisant le moment correspondant à une section considérée par la hauteur de la poutre.

Il nous reste à déterminer l'effort U agissant dans le treillis. Prenons pour cela les moments par rapport au point d'intersection des forces X et Z . Ces deux forces étant parallèles se coupent à l'infini et par suite le problème est indéterminé. Dans ce cas nous pourrions, en appliquant la méthode précédente, déterminer la résultante des forces extérieures agissant sur la section $x x$, et la décomposer suivant la direction U et suivant la droite joignant le point d'intersection des forces R_x , U , au point de rencontre des deux autres forces X et Z , (cette dernière sera alors parallèle aux éléments X et Z). Nous devons donc décomposer R_x suivant la barre de treillis U et une parallèle aux membrures X et Z . Cette décomposition est tracée (fig. 191) et la valeur cherchée se trouve donnée par la droite dg .

Pour déterminer l'effort agissant dans l'élément $n\alpha$, nous considérerons la section $x_1 x_1$. Cette section ne coupant que deux éléments de la poutre, nous pourrions toujours rapporter les mo-

ments à un point quelconque extérieur à αn et situé sur l'autre élément, par exemple au point β .

Nous aurons alors :

$$A \cdot 2a - X_1 \cdot \beta\alpha = 0.$$

D'où :

$$X_1 = \frac{A \cdot 2a}{\beta\alpha}.$$

Nous pourrions encore exprimer le moment de A au moyen de l'ordonnée rr du polygone funiculaire et de la tension horizontale du polygone des forces.

Nous aurons alors l'équation suivante :

$$X_1 = \frac{rr \cdot h}{\beta\alpha}.$$

La poutre ayant une forme symétrique nous n'aurons pas besoin de déterminer les efforts intérieurs correspondant à la seconde moitié, ceux de la première étant une fois connus.

La poutre (Pl. XI, fig. 189) a une ouverture $l = 9^m,5$, une hauteur $t = 3^m,3125$, quant aux barres de treillis, elles sont inclinées à 45° . Les forces agissant sur cette poutre sont : $1 = 2 = 3 = 1^t,2$. Nous avons construit le polygone des forces avec la tension horizontale $h = 4^m,00$ et avons de plus pris $a = t = 2^m,3125$.

En appliquant les formules développées ci-dessus, nous avons trouvé :

$$X = \frac{A \cdot 2a - (1) a}{t} = \frac{1^t,8 \cdot 2 \cdot 2^m,3125 - 1^t,2 \cdot 2^m,3125}{2^m,3125}$$

$$X = 1,8 \cdot 2 - 1,2 = - 2^t,4.$$

La même valeur calculée au moyen de l'ordonnée du polygone funiculaire et de la tension horizontale du polygone des forces est également :

$$X = \frac{Y_\beta \cdot h}{t} = \frac{1^t,39 \cdot 4^m,0}{2^m,3125} = - 2^t,4.$$

Nous avons trouvé de même pour la force Z calculée des deux manières :

$$Z = \frac{A \cdot a}{t} = \frac{1^t,8 \cdot 2^m,3125}{2^m,3125} = 1^t,8.$$

$$Z = \frac{Y_\alpha \cdot h}{t} = \frac{1^t,04 \cdot 4^m,00}{2^m,3125} = 1^t,8.$$

Quant à la valeur de U, nous la mesurerons directement (fig. 191), elle est :

$$U = dg = 0^t,85.$$

Nous pourrions calculer l'intensité de U au moyen de la formule suivante :

$$U^2 = \overline{ca^2} + \overline{cg^2} = \overline{0,60^2} + \overline{0,60^2}.$$

D'où :

$$U = \sqrt{0,36 + 0,36} = 0^t,85.$$

Nous aurions de même :

$$R_{xx} = U \cdot \sin. dgc = U \cdot \sin. 45^\circ.$$

D'où :

$$U = \frac{0^t,6}{\sin. 45^\circ} = 0^t,85.$$

La valeur de X_1 est enfin donnée par la formule :

$$X_1 = \frac{A \cdot 2a}{\alpha\beta} = \frac{1^t,8 \cdot 4^m,625}{3^m,28} = - 2^t,54;$$

ou bien encore par la formule :

$$X_1 = \frac{rr \cdot h}{\alpha\beta} = \frac{2^t,08 \cdot 4^m,00}{3,28} = - 2^t,54.$$

Dans une poutre supportée en ses deux extrémités, le moment des forces extérieures est toujours positif pour toutes les sections menées entre les appuis (voir la figure des moments), le moment des forces intérieures sera donc toujours négatif. De plus comme nous devons, pour déterminer les efforts dans la membrure supérieure, rapporter les moments à un point de la membrure inférieure, il s'en suit que les éléments de la membrure supérieure seront toujours comprimés. Réciproquement la membrure inférieure sera toujours tendue.

TROISIÈME EXEMPLE.

Soit à déterminer la valeur des forces intérieures dans la ferme représentée (Pl. XII, fig. 194). Appliquons encore à ce cas la méthode des moments statiques. Supposons les charges I, II, III... VII égales entre elles et équidistantes.

Désignons par A et B les réactions des appuis, et par 1, 2, 3.... les forces agissant dans chaque élément. Les différents bras de levier sont indiqués (fig. 198). Pour déterminer les valeurs des efforts 1, 2, nous mènerons la section xx . Cette section seule ne

coupera que deux éléments de la ferme ; toute autre section en rencontrera trois ou même davantage.

a) Considérons une section ne rencontrant que deux éléments soit xx cette section. Ecrivons l'équation des moments des forces 1 et 2 rapportés au point α : (Fig. 198)

$$A \left(m + \frac{x}{2} \right) - 1 \cdot \frac{y}{2} = 0.$$

D'où la valeur cherchée :

$$1 = \frac{A \left(m + \frac{x}{2} \right)}{\frac{y}{2}}.$$

La valeur de la force 2 sera donnée par la formule :

$$m \cdot A - 2 \cdot \frac{z}{2} = 0$$

D'où :

$$2 = \frac{m \cdot A}{\frac{z}{2}}.$$

Dans cette dernière expression les moments sont rapportés au point β .

b) Considérons maintenant une section rencontrant trois éléments. Pour déterminer la force 3, nous mènerons la section ii et nous prendrons les moments par rapport au point γ . Nous aurons :

$$1 \cdot m - 3 \cdot n = 0.$$

D'où :

$$3 = \frac{1 \cdot m}{n}.$$

Pour déterminer la force 4, nous mènerons la section yy et prendrons α comme axe.

Nous aurons dans ce cas :

$$A \left(m + \frac{x}{2} \right) - 1 \cdot \frac{x}{2} - 4 \cdot \frac{y}{2} = 0.$$

D'où :

$$4 = \frac{A \left(m + \frac{x}{2} \right) - I \cdot \frac{x}{2}}{\frac{y}{2}}$$

Nous pourrons de même établir les équations suivantes qui nous donneront les valeurs 5, 6, 14, 12 et 13.

Pour la force 5 : *une relation à y*

$$I \cdot m - 5 \cdot z = 0.$$

D'où :

$$5 = \frac{I \cdot m}{z}$$

Pour la force 6 : *une relation à z*

$$A \cdot 2m - I \cdot m - 6 \cdot z = 0.$$

D'où :

$$6 = \frac{A \cdot 2m - I \cdot m}{z}$$

Pour la force 14 : *une relation à h y hancle I = II = III*

$$A \cdot 4m - I \cdot 6m - 14 \cdot \frac{4}{5} h = 0. ; -I (3m + 2m + m)$$

D'où :

$$14 = \frac{A \cdot 4m - I \cdot 6m}{\frac{4}{5} h}$$

Pour la force 12 : *une relation à x*

$$A (2m + x) - I \{ (m + x) + x - (m - x) \} - 12 \cdot y = 0.$$

D'où :

$$12 = \frac{A \cdot (2m + x) - I \{ (m + x) + x - (m - x) \}}{y}$$

Pour la force 13 : *une relation à y en fonction de la force A y I.*

$$I (m + 2m + 3m) - 14 \frac{h}{5} - 13 \cdot 2z = 0.$$

D'où :

$$13 = \frac{I (m + 2m + 3m) - 14 \frac{h}{5}}{2z}$$

Les sections correspondant aux équations ci-dessus sont la section yy pour les forces 5 et 6 et la section ss pour les forces 14, 12, 13. Quand aux points, auxquels les moments se trouvent rapportés, ils sont désignés successivement par les lettres γ , δ , ρ , π , γ .

c) La section considérée rencontre plus de trois éléments.

La section ee rencontre les éléments 8, 9, 7 et 6 et nous ne connaissons que la force agissant dans ce dernier. Les trois autres éléments se coupant en un même point, le problème sera par conséquent indéterminé.

Mais si au lieu de la section ee , nous considérons la section y_1y_1 , nous remarquerons que les forces agissant dans les éléments rencontrés par cette dernière section à l'exception de la force 9 se coupent toutes en un même point ρ (voir fig. 196); nous pourrons donc rapporter les moments des forces III, IV, 8, 9, 10, 15, 16, à ce point ρ , établir l'équation des moments, et en tirer la valeur de 9. Nous aurons :

$$-III \cdot m + 9 \cdot z = 0. \quad (1)$$

D'où :

$$9 = \frac{III \cdot m}{z}.$$

L'équation ci-dessus nous montre que la force 9 est égale à la force 5, ce qui nous permettra de calculer les efforts agissant dans les éléments 7 et 8 rencontrés par la section ee .

Rapportons les moments au point γ pour la force 7 et au point π pour la force 8, nous pourrons poser les deux équations suivantes :

$$I(m + 2m) + 9z - 7 \cdot 2n = 0.$$

$$A(2m + x) - I \{ (m + x) + x \} + 9 \cdot z - 8 \cdot y = 0.$$

D'où les valeurs cherchées :

$$7 = \frac{I \cdot 3m + 9 \cdot z}{2n},$$

$$8 = \frac{A(2m + x) - I \{ (m + x) + x \} + 9 \cdot z}{y}.$$

Pour déterminer la force 10, nous considérerons la section rr , nous prendrons les moments par rapport au point γ et nous aurons :

$$I(m + 2m) + 9 \cdot z + 14 \frac{h}{5} - 10 \cdot 2z = 0.$$

D'où :

$$10 = \frac{I(m + 2m) + 9z + 14 \frac{h}{5}}{2z}$$

Nous déterminerons la force 11 au moyen de la section vv et du point ρ (voir fig. 197). L'équation des moments correspondants sera :

$$-III \cdot m + 11 \cdot n = 0. \tag{2}$$

D'où :

$$11 = \frac{III \cdot m}{n}.$$

La force 11 est donc égale à la force 3.

Quant à la nature de ces forces, elle est donnée directement par les équations considérées. Ainsi dans l'équation (2), le moment connu de la force extérieure III étant négatif, celui de la force extérieure cherchée 11 doit être nécessairement positif. Nous reportant alors à la fig. 197, nous verrons que la force agissant dans l'élément 11 sera un effort de compression.

Nous trouverons de même que le moment de la force 9 donné par l'équation (1) est positif ; la barre 9 (voir fig. 196) sera donc tendue.

Quant aux flèches indiquant la nature des efforts intérieurs, elles devront toujours être portées en dehors de la section considérée et du côté opposé aux forces extérieures, par exemple à droite des sections xx , rr , ss et ee et en dessous des sections vv et yy .

Si donc nous déterminons la nature des efforts dans les différents éléments de la ferme (fig. 194), nous verrons que ceux de la membrure supérieure 1, 4, 8, 12, 15, 18, 22, 26 seront comprimés

ainsi que les barres de treillis 3, 7, 11, 17, 21, 25 ; par contre, tous les autres éléments seront tendus.

Nous avons représenté sur l'épure les barres comprimées par un double trait et les barres tendues par un trait simple.

MÉTHODE DE M. CRÉMONA

Lorsqu'une poutre ne sera soumise qu'à l'action de forces constantes (ce qui arrive le plus souvent), nous emploierons de préférence la méthode suivante qui est de beaucoup plus simple et nous permettra de déterminer plus rapidement les valeurs cherchées.

Considérons la ferme représentée (Pl. XII, fig. 192) elle est de forme symétrique et se trouve soumise à l'action des charges I, II, III. Les réactions correspondantes des appuis ont pour valeur $A = B = \frac{I + II + III}{2}$.

Désignons par 1, 2, 3.....11 les éléments qui composent cette ferme et donnons aux forces intérieures la même dénomination.

La méthode que nous emploierons sera la suivante : nous considérerons l'un après l'autre, en commençant par exemple par l'appui gauche, tous les nœuds de la poutre, nous déterminerons la résultante des forces connues agissant en chaque nœud et nous décomposerons ensuite cette résultante suivant les forces inconnues qui se coupent en ce même point. Les composantes prises en signe contraire nous donneront la valeur des forces intérieures cherchées ; la direction de ces dernières déterminera la nature des efforts développés dans les éléments de la poutre.

A l'appui gauche agit seulement la force extérieure A qui n'est autre que la réaction même de cet appui. A sera donc à décomposer suivant les directions 1 et 2. Pour cela, portons sur une verticale quelconque (Pl. XII, fig. 193) en *ab* la grandeur de la réaction A ; menons par *a* une parallèle à 1 et par *b* une parallèle à 2. Ces deux parallèles se coupent en un point *c* et les deux droites *ac* et *bc* représentent la valeur des forces 1 et 2. La

nature de ces efforts se déterminera dans le polygone des forces, en observant le sens des flèches. Ainsi l'élément 1 sera comprimé et la barre 2 sera tendue.

Considérons maintenant le nœud suivant. Au point I agissent quatre forces I, 1, 3, 4, dont les deux premières seules sont connues (nous avons de préférence choisi en second lieu le point I et non le nœud inférieur, car en ce dernier agissent les quatre forces 2, 3, 5, 6, dont l'une d'elles, la force 2, est seule déterminée). Si donc nous composons les forces $I = ad$ et $1 = ac$ et si nous décomposons leur résultante cd suivant les directions 3 et 4, les composantes ainsi déterminées de et ce seront les valeurs cherchées. Portant alors en sens inverse les directions trouvées pour 3 et 4 à droite de la section x_1x_1 , nous verrons que les barres 3 et 4 seront comprimées.

Passons au nœud inférieur. Des forces 2, 3, 5, 6, agissant en ce point, deux sont connues ; savoir :

$$2 = bc \text{ et } 3 = ce.$$

Nous pourrions déterminer leur résultante be qui, décomposée à son tour suivant les barres 5 et 6, nous donnera les efforts cherchés ef et fb . Les barres 5 et 6 seront tendues ; ce qui se voit du reste à la simple inspection du polygone des forces.

La poutre étant de forme symétrique, il en sera de même des efforts ; toutefois nous déterminerons encore ceux correspondant à la seconde moitié de la ferme, cette nouvelle construction servant à contrôler la première. Considérons le nœud suivant II. Les forces agissant en ce point sont $5 = ef$, $4 = de$ et $II = di$; leur résultante fi décomposée suivant $fg = 8$ et $ig = 7$ donne les valeurs cherchées.

Nous déterminerons de la même manière la résultante gh des forces connues $7 = ig$ et $III = ik$ agissant au point III. Les composantes hk et hg détermineront l'intensité des forces 10 et 9. En répétant encore la même construction, nous trouverons en $bh = 11$ la résultante des forces $6 = bf$; $8 = fg$; $9 = gh$, qui, composée avec la force $10 = hk$, devra donner comme résultante une force

$B = bk$, de signe contraire à la réaction B de l'appui droit de la ferme.

Dans la composition et la décomposition des forces, il nous faudra toujours observer le signe de chacune d'elles et de plus avoir soin d'opérer la décomposition de telle manière que les composantes qui nous serviront à déterminer les efforts suivants tombent à la suite l'une de l'autre.

Un exemple fera mieux comprendre la remarque ci-dessus.

Dans la décomposition de A , suivant les éléments 1 et 2, nous aurions pu également mener par b une parallèle à 1 et par a une parallèle à 2; nous aurions trouvé pour ces composantes les mêmes valeurs que précédemment; mais alors la construction de la résultante de 1 et de I ne s'opérerait pas avec autant de facilité. C'est pour parer à cet inconvénient que nous avons suivi la marche indiquée sur l'épure (Pl. XII, fig. 193). Dans chaque cas particulier, la marche à suivre dans la décomposition se trouve entièrement définie par la forme même de la poutre.

La nature des forces intérieures une fois déterminée pour chaque élément, nous avons représenté les barres, travaillant à la tension par un trait simple, et celles à la compression par un trait double. Cette distinction se trouve faite aussi bien sur la poutre (fig. 192) que sur le polygone des forces correspondant (fig. 193). Une telle représentation donne une idée très claire de la nature des efforts intérieurs.

Comme nous pouvons le voir dans le polygone des forces (fig. 193), l'intensité des forces intérieures dépend de la grandeur des réactions. Celles-là seront d'autant plus grandes que la réaction A sera plus grande et inversement. Or, chaque force agissant sur la poutre a pour effet d'augmenter la valeur de la réaction; les forces intérieures atteindront donc leur maximum d'intensité dans chaque élément lorsque la poutre sera totalement chargée.

Observations générales relatives aux poutres à trois ou plusieurs éléments (poutres composées).

Nous pourrions conclure des considérations qui précèdent que, non seulement la répartition des charges, mais encore la forme même de la poutre influe sur la valeur de l'effort intérieur développé dans chaque élément de la construction. En général, la forme d'un ouvrage dépend de sa destination; ainsi une ferme embrasse ordinairement la forme de la toiture qu'elle doit supporter, etc... Il nous faudra donc, dans chaque cas particulier, tout en nous conformant aux conditions exigées par la nature de la construction, rechercher la forme la plus économique, c'est-à-dire répartir la matière dans chaque élément de la manière la plus favorable.

Nous avons représenté fig. 192, 194, 199, 201, 203, 205, 207, 209, 211, 220, 242 et 258, plusieurs formes de fermes et nous avons déterminé les efforts intérieurs développés dans chacun des éléments qui les composent. Dans le courant de cet ouvrage, nous aurons encore l'occasion de revenir sur le tracé de ces épreuves.

Les poutres indiquées fig. 213, 217, 218, 227, 231, 233, et 239 ont leurs membrures parallèles et sont généralement connues sous le nom de poutres à treillis.

Les figures 262, 264 et 266 donnent le cas de poutres composées reposant en un seul point d'appui, tandis que les figures 251 et 254 représentent des poutres reposant sur un ou deux points d'appui avec une partie en porte à faux.

Les poutres fig. 244 et 248 ont été construites dans l'hypothèse d'un effort constant, soit dans la membrure inférieure, soit dans la membrure supérieure; ces poutres composées sont désignées sous le nom de poutres paraboliques.

Quant aux poutres de deux ou trois éléments, nous les désignerons sous le nom de poutres composées ou de poutres à panneaux, pour les distinguer des poutres simples (homogènes) ou à élément unique. Les poutres courbes (arcs ou chaînettes) peuvent être aussi construites comme poutres à panneaux.

Nous pourrons, en appliquant l'une quelconque des constructions données ci-dessus, déterminer les efforts intérieurs développés dans chacune de ces poutres sous l'action de forces quelconques. Mais, comme cette recherche se simplifie beaucoup pour certaines formes, nous croyons nécessaire de les traiter ici avec plus de détails.

Poutres en treillis et à membrures parallèles

Dans la poutre représentée Pl. XIV, fig. 213, les deux membrures sont parallèles et reliées entre elles par un treillis dont les barres sont disposées symétriquement et forment toutes le même angle avec l'horizontale. Les poutres (Pl. XIV, fig. 217 et 218) ont aussi leurs membrures parallèles ; quant aux barres de treillis, elles sont alternativement verticales et inclinées sur l'horizontale. On désigne généralement ces dernières sous le nom de poutres en treillis avec montants et contrefiches.

Dans l'exemple traité (fig. 213), les barres de treillis forment avec l'horizontale un angle de 45° . Les charges I, II, III, IV, V, qui agissent sur cette poutre, dont la hauteur a été prise égale au dixième de la portée, sont toutes égales entre elles et viennent se concentrer aux nœuds supérieurs.

Pour déterminer les forces intérieures dans chaque élément de cette construction, nous aurons à former le polygone des forces I, II, III, IV, V, (fig. 214), le polygone funiculaire correspondant (fig. 215) et la figure des efforts tranchants (fig. 216). Comme distance polaire du polygone des forces, nous prendrons une longueur double de la hauteur de la poutre, savoir $h = 2m$, en désignant par m la hauteur de la poutre. Menons une section quelconque xx et déterminons la valeur des efforts développés dans les éléments rencontrés par cette section.

Pour déterminer la force 4, nous devons écrire l'équation des moments en les rapportant au point de rencontre α des deux autres forces 5 et 6.

Le moment de la force extérieure à la section xx est, comme nous le savons :

$$M = Y_{\alpha} \cdot h.$$

L'équation des moments correspondants sera la suivante :

$$Y_{\alpha} \cdot h - 4 \cdot m = 0.$$

D'où la valeur de la force cherchée :

$$4 = \frac{Y_{\alpha} \cdot h}{m}.$$

Nous obtiendrons donc l'effort dans la membrure en divisant le moment de la force extérieure pris par rapport au point α par la hauteur de la poutre.

La distance polaire h est-elle égale à la hauteur de la poutre m , l'ordonnée Y_{α} du polygone funiculaire représentera directement la force 4. Dans cet exemple, nous avons fait :

$$h = 2m.$$

La force 4 sera par suite égale au double de l'ordonnée Y_{α} :

$$4 = 2 \cdot Y_{\alpha}.$$

Pour trouver la force 6, nous rapporterons les moments au point d'intersection β des deux forces 4 et 5, et nous aurons :

$$6 = 2 \cdot Y_{\beta}.$$

Il en sera de même pour toutes les autres sections de la poutre. Les ordonnées correspondantes de la surface des moments prises en double donneront la valeur des efforts correspondants dans la membrure. Dans la fig. 215, les indices des différentes ordonnées concordent avec ceux des efforts développés dans les membrures.

Pour déterminer les forces agissant dans la barre de treillis, nous aurons, comme nous l'avons déjà vu (Pl. XI, fig. 191), à décomposer la force extérieure à la section considérée suivant une horizontale et une parallèle à la barre de treillis. Chaque ordonnée de la ligne des efforts tranchants représentant en grandeur et en direction la force extérieure à la section considérée, il s'ensuit que nous pourrons de suite opérer cette décomposition (fig. 216).

Comme la force extérieure n'est pas seulement représentée par l'ordonnée correspondant à la section xx , mais encore par une ordonnée quelconque du panneau considéré qp , nous pourrions donc opérer notre décomposition sur l'une d'entre elles. Nous choisissons à cet effet l'ordonnée médiane $\gamma\delta$. La droite $\gamma\tau$ sera la force cherchée 5, elle aura la même direction que l'effort tranchant (ici, de bas en haut). En appliquant la construction ci-dessus, nous obtiendrons, en donnant à cet effort une direction inverse, la nature de la force intérieure dans la barre considérée. La barre 5 sera comprimée.

Nous trouverons de même pour la section x_1x_1 , en $\varepsilon\rho$ la force 7; et la barre 7 sera soumise à un effort de tension.

Nous trouverons pour la section x_2x_2 que la barre de treillis s'élevant de gauche à droite est tendue.

Nous remarquerons (fig. 213), que la barre 5 s'élève de gauche à droite, tandis que la barre 7 s'élève de droite à gauche.

La nature des forces intérieures dans le treillis ne dépend donc pas seulement de la direction de la force extérieure, mais encore du sens de l'inclinaison des barres.

Dans la partie gauche de la poutre, l'effort tranchant agit du bas vers le haut; les barres de treillis s'élevant de gauche à droite seront par conséquent comprimées, et les autres tendues. Mais, comme nous l'avons vu, l'effort tranchant dans une poutre, en passant par zéro, change aussi de signe. La nature des efforts dans les barres situées à droite du point du passage changera donc aussi, et les barres s'élevant de gauche à droite se trouveront alors tendues, celles s'élevant de droite à gauche comprimées.

Ainsi qu'on peut le voir, nous saurons déterminer, au moyen de la figure des efforts tranchants, l'intensité et la nature des efforts intérieurs développés dans les barres de treillis.

Nous avons ainsi trouvé les valeurs des forces 1, 5, 9, 11, 15, 19, 3, 7, 13, 17 des lignes représentant ces forces par les mêmes numéros. Les barres comprimées 1, 5, 9, 11, 15, 19, sont représentées par un double trait, les barres tendues 3, 7, 13, 17, par un simple.

Quant aux efforts développés dans les membrures, nous savons que, dans une poutre supportée en ses deux points extrêmes, la membrure supérieure est comprimée et la membrure inférieure tendue. C'est pourquoi nous avons également représenté par un double trait la membrure supérieure, tandis que la membrure inférieure se trouve indiquée par un simple trait.

Les poutres représentées (Pl. XIV, fig. 217 et 218) ont la même portée, la même hauteur que celle indiquée (fig. 213) et se trouvent de plus soumises à l'action des mêmes charges. Mais comme chacune de ces poutres est divisée en un nombre double de panneaux, il s'en suit que les nœuds seront chargés de deux en deux. Pour déterminer les efforts intérieurs dans chaque élément, nous négligerons encore ici, comme nous l'avons fait dans le cas précédent, la charge propre qui, comme nous le savons, est sans influence sur la manière de procéder.

Les charges étant les mêmes, nous pourrons, pour déterminer les efforts intérieurs, nous servir de la figure des moments et de la figure des efforts tranchants déjà construites (fig. 215 et 216), puisque ces figures sont, pour une même répartition des forces et pour des poutres de même portée indépendantes de la forme de la construction.

Occupons-nous tout d'abord de la poutre (fig. 217). Menons une section $\alpha\alpha$. Nous devons, pour déterminer la force 10, rapporter les moments au point α et pour la force 8 au point β et nous aurons :

$$Y_{\alpha} \cdot h - 10 \cdot m = 0.$$

Mais :

$$h = 2m$$

d'où :

$$10 = 2 Y_{\alpha}.$$

Nous trouverons de même :

$$8 = 2 Y_{\beta}.$$

Les efforts dans les membrures ainsi déterminés se trouvent seulement indiqués sur la partie gauche de la ~~courbe~~ ^{figure} des moments et en haut ; les indices se correspondent. La poutre étant symétrique, il en sera de même pour les efforts à droite et à gauche de l'axe de symétrie.

Si maintenant, nous menons (fig. 218) une section xx à la même distance des appuis, nous devons pour la force 10 rapporter les moments au point β , et pour la force 8 au point α , et nous aurons :

$$10 = 2Y_{\beta}$$

$$8 = 2Y_{\alpha}$$

Pour distinguer les forces agissant dans les membrures de celles trouvées précédemment, nous les avons numérotées sur la droite de la courbe des moments également avec des indices correspondants.

Quant aux efforts développés dans les barres de treillis, ils se déterminent comme nous l'avons vu ci-dessus. Ainsi la ligne $\gamma\delta$ (fig. 217) donnera la grandeur de la force extérieure à la section xx , et $\delta\pi$ représentera l'effort dans la barre 9, qui sera tendue, comme on le voit, à la simple inspection de la ligne des efforts tranchants.

Si par contre nous cherchons la force développée dans la barre 9 (figure 218), nous verrons que $\gamma\delta$ représentera également l'effort tranchant et $\gamma\tau$ l'effort 9. La barre 9 sera comprimée.

Il résulte de ce qui précède que la nature des efforts dans les barres du treillis varie avec leur mode d'inclinaison sur l'horizontale.

Si donc nous déterminons les efforts agissants dans le treillis de ces deux poutres, nous verrons que dans l'une (fig. 217) toutes les contrefiches, sans exception, seront tendues, et qu'elles seront comprimées dans l'autre (fig. 218), puisque leur inclinaison change en même temps que l'effort tranchant de positif devient négatif.

Il nous reste à déterminer les forces intérieures développées dans les montants. Cherchons par exemple la force 7 (fig. 217), et pour cela menons la section $x_1 x_1$. La force extérieure correspondante $\gamma\delta$ représentera la force cherchée, puisque cette force extérieure décomposée suivant une verticale et une horizontale

donne comme composante horizontale une force d'intensité zéro. Nous aurons $\gamma\delta = 7$, et nous trouverons, en appliquant la méthode connue, que le montant 7 sera comprimé. Il en sera de même pour tous les autres montants.

Si maintenant nous nous reportons à la figure 218, nous pourrions déterminer d'une manière analogue les efforts dans les montants. Dans ce cas, il seront tous tendus.

En comparant les résultats trouvés dans chaque cas pour la section x_1x_1 , nous observerons que les forces extérieures, et par suite les forces intérieures, sont égales, mais de signes contraires. Il n'en sera pas de même pour tout autre section rencontrant un montant qui coïncide avec l'une des charges agissant sur la poutre.

Considérons en effet la section x_3x_3 . La force extérieure correspondante et par suite la force 3 (fig. 217) sera égale à la réaction de l'appui A, tandis que pour la poutre (fig. 218) cette même force sera $\gamma\delta = A - I$. Cela tient à ce que dans cette dernière la force I se trouve à gauche de la section considérée.

Nous concluons donc, des remarques qui précèdent, que les efforts dans le treillis varieront avec le mode de concentration des charges, c'est-à-dire suivant que celles-ci agiront, soit sur la membrure inférieure, soit sur la membrure supérieure, soit sur toutes les deux en même temps.

Les résultats de la construction se trouvent également indiqués (fig. 216). Les indices à gauche correspondent à la poutre (fig. 217); ceux à droite à la poutre (fig. 218). Les numéros des montants sont en caractères verticaux, ceux des contrefiches en caractères inclinés.

La principale différence entre ces deux genres de construction consiste donc dans la nature des efforts développés dans les barres de treillis. Dans la poutre (fig. 217), les montants se trouvent comprimés et les contrefiches tendues, tandis que dans la poutre (fig. 218) les montants sont au contraire tendus et les contrefiches comprimées.

Ces deux poutres peuvent être considérées comme une modifi-

cation de la poutre représentée (fig. 213). En effet, si, dans cette dernière, nous faisons varier l'inclinaison des barres comprimées jusqu'à ce qu'elles deviennent verticales, nous obtiendrons la forme indiquée (fig. 218).⁷

La méthode ci-dessus, appliquée à la détermination des efforts dans les barres de treillis, conduit rapidement au but et donne en même temps une idée très claire de la nature des forces agissant dans chaque élément de la construction.

Les barres ab et ac ne sont pas, à proprement parler, indispensables à la construction et sont plutôt à considérer comme pièces complétant l'ensemble. Ainsi, dans les poutres (fig. 213 et 218), elles ne servent qu'à transmettre directement à l'appui les charges appliquées au point b . Dans la poutre (fig. 217), la barre ab doit de plus transmettre la réaction A à l'appui.

Comme moyen de vérification, nous avons tracé (fig. 219, Pl. XIV) les efforts développés dans la poutre (fig. 217) en employant la méthode de Cremona.

La poutre considérée se trouve-t-elle soumise à l'action de surcharges mobiles, les barres de treillis des panneaux du milieu seront, comme le montre clairement la surface des efforts tranchants maxima (Pl. VIII, fig. 112), alternativement tendues et comprimées suivant le sens de l'effort tranchant. Aussi faudra-t-il donner à ces barres une section capable de résister aussi bien à la compression qu'à la tension.

Si, dans la poutre représentée (fig. 217, Pl. XIV), les diagonales du treillis ne doivent travailler qu'à la traction, il faudra alors, dans toute la partie où les efforts tranchants pourront changer de signe, ajouter des barres de treillis inclinées en sens inverse, comme l'indique le tracé en pointillés.

Ainsi, supposons qu'à une position donnée de la surcharge roulante, corresponde dans l'espace $r v$ un effort tranchant dirigé de haut en bas, la barre $r e$ se trouvera par suite comprimée. Mais comme cette barre ne peut travailler qu'à la traction, sa résistance sera nulle, et la barre symétrique $i v$ remplacera cette dernière, et l'équilibre se trouvera établi.

Cette diagonale $i v$ est connue sous le nom de contrefiche. Souvent on construit des poutres comme celles représentées (fig. 217 et 218), en laissant les contrefiches régner sur toute leur portée.

Poutre parabolique.

Poutre parabolique dont la membrure supérieure se trouve soumise à un effort constant.

La poutre parabolique (Pl. XVI, fig. 244) a été construite de telle manière, que les éléments constituant la membrure supérieure se trouvent tous soumis à des efforts d'égale intensité.

Pour déterminer la forme à donner à la membrure supérieure, nous emploierons le procédé suivant :

Les charges agissant sur cette poutre sont équidistantes et égales entre elles, savoir I=II=III=IV=V=VI=VII=VIII.

Construisons (fig. 245 et 246) le polygone des forces et le polygone funiculaire correspondant. Prenons la hauteur de la construction égale au sixième de la portée, c'est-à-dire $m = \frac{1}{6}l$; et prenons de plus la tension horizontale du polygone des forces égale au double de la hauteur de la poutre, $h = 2m$.

Pour trouver la valeur de l'effort développé dans la barre 4, menons la section $\alpha\alpha$ et établissons l'équation des moments par rapport au point α . Nous aurons :

$$Y_2 \cdot h - 4 \cdot m_2 = 0.$$

D'où la valeur cherchée :

$$4 = \frac{Y_2 \cdot h}{m_2}$$

Menons la section $\alpha_1 \alpha_1$ et rapportons les moments au point β . Nous pourrions poser :

$$14 = \frac{Y_4 \cdot h}{m}.$$

D'où il suit, h étant égal à $2m$:

$$14 = 2Y_4.$$

D'après notre hypothèse, les efforts développés dans la membrure supérieure doivent être d'égale intensité. De là, la relation suivante :

$$\frac{Y_2 \cdot h}{m_2} = \frac{Y_4 \cdot h}{m}$$

ou bien encore :

$$\frac{Y_2}{m_2} = \frac{Y_4}{m}$$

Les efforts développés dans les éléments 4 et 14 de la membrure supérieure ne seront égaux que si leurs distances aux axes α et β sont entre elles dans le même rapport que les ordonnées correspondantes du polygone funiculaire.

Cette relation une fois trouvée, il nous sera facile de déterminer les distances des éléments 1, 4, 6, 10, 14 aux axes α , β , etc. Pour cela, portons (Pl. XVI, fig. 247) en ox l'ordonnée Y_4 et en xz la distance de l'élément 14 à l'axe β , c'est-à-dire la hauteur de la poutre m choisie d'une manière arbitraire. Portons successivement sur la ligne ox les ordonnées du polygone funiculaire Y_1, Y_2, Y_3 , correspondant aux charges considérées.

Si, par les points ainsi déterminés, nous menons des parallèles à $m=xz$, nous obtiendrons les distances cherchées m_1, m_2, m_3 , et nous pourrons construire la membrure supérieure. A cet effet, décrivons par chacun des axes pris comme centre un arc de cercle de rayon m_1, m_2, m_3, m . Menons ensuite par l'appui de la barre 1 tangente au cercle de rayon m_1 et prolongeons-la jusqu'à sa rencontre avec la force I. Par le point d'intersection ainsi obtenu, menons une tangente au cercle décrit du point α comme centre avec m_2 comme rayon; cette tangente nous donnera la position de l'élément 4. Par le point de rencontre de 4 et II, menons entre les forces II et III une tangente à l'arc de cercle décrit avec m_3 comme rayon, cette tangente ne sera autre que l'élément 6. Nous déterminerons enfin comme ci-dessus l'élément 10 en menant une tangente au cercle de rayon m .

L'élément 14 doit aussi être tangent à ce dernier arc de cercle m . Pour cela, il faut que les éléments 10 et 14 se coupent sur la verticale IV. Cette condition ne se trouvant pas réalisée dans ce cas, il s'en suit que la barre 13 serait inclinée sur la verticale. Mais, pour maintenir cette dernière barre dans sa position verticale, nous suréleverons un peu l'élément 14. La poutre se trouvera par suite avoir dans son milieu une hauteur un peu plus grande que celle admise tout d'abord. Cette augmentation de hauteur sera sans influence dans la plupart des constructions à établir ; mais si la hauteur de la poutre était parfaitement déterminée, il faudrait par contre diminuer un peu les rayons m_1, m_2, m_3 .

La construction ci-dessus s'applique à la seconde moitié de la poutre, les charges qu'elle supporte étant placées symétriquement par rapport à l'axe.

L'effort développé dans la membrure supérieure est d'intensité constante et a pour valeur :

$$1 = 4 = 6 = 10 = 14 = \frac{Y_1 \cdot h}{m_1} = \frac{Y_2 \cdot h}{m_2} = \frac{Y_3 \cdot h}{m_3} = \frac{Y_4 \cdot h}{m}$$

Il n'en est pas de même pour la membrure inférieure. Pour trouver l'effort agissant dans l'élément 2, nous considérerons la section $\alpha\alpha$ et établirons l'équation des moments en les rapportant au point δ . Nous aurons :

$$Y_1 \cdot h - 2 \cdot t_1 = 0$$

d'où la valeur cherchée :

$$2 = \frac{Y_1 \cdot h}{2 t_1}$$

Quant à la force 16, nous l'obtiendrons en prenant les moments par rapport au point γ et nous pourrons poser :

$$Y_4 \cdot h - 16 \cdot t_4 = 0.$$

Mais :

$$t_4 = m.$$

D'où la valeur cherchée :

$$16 = \frac{Y_4 \cdot h}{m} = 14.$$

Il est à remarquer que dans la partie de la poutre où les deux membrures sont parallèles, la valeur de l'effort développé dans chacune d'elles s'obtient encore en divisant le moment fléchissant correspondant par la hauteur de la poutre.

Pour déterminer la force 3, nous mènerons la section xx , nous rapporterons les moments au point d'intersection ρ des forces 4 et 2, et nous aurons :

$$- Y_{\rho} \cdot h + 3 \cdot g = 0.$$

D'où :

$$3 = \frac{Y_{\rho} \cdot h}{g}.$$

Nous saurons encore trouver les valeurs des forces 2, 3, 4 d'une autre manière, c. à d. en décomposant la force extérieure R_x correspondant à la section xx suivant les trois directions 2, 3, 4. Pour cela, déterminons tout d'abord la direction γe de la force extérieure R_x , et sa valeur ce . Joignons ensuite le point d'intersection ρ des éléments 4 et 2 au point de rencontre e de la force extérieure R_x et de l'élément 3 prolongé. Décomposons $ec = R_x$ suivant les directions $e\rho$ et 3. Soient $r = e\varepsilon$ et $3 = \varepsilon c$ ces composantes. Décomposant alors la force r suivant les directions 4 et 2, nous aurons en

$$\varepsilon c = 3, \varepsilon v = 4 \text{ et } ev = 2,$$

les efforts cherchés.

Si dans le polygone des forces nous traçons les flèches indicatrices (comme nous l'avons déjà fait plusieurs fois dans le courant de cet ouvrage), nous verrons à leur simple inspection que l'élément 3 est tendu.

Pour déterminer l'effort agissant dans la barre verticale 5, menons la section x_3x_3 et établissons l'équation des moments en les rapportant à l'axe passant par le point ρ c. à d. par le point d'intersection des éléments 4 et 8. Nous aurons :

$$- Y_{\rho} \cdot h + 5 \rho \alpha = 0$$

d'où :

$$5 = \frac{Y_{\rho} \cdot h}{\rho \alpha}.$$

Le moment de la force 5 par rapport au point ρ étant positif, la barre 5 sera comprimée.

Nous saurons encore trouver la valeur de la force 5 en employant un autre procédé. En effet nous pourrions décomposer la force extérieure à la section x_3x_3 en deux composantes verticales dont l'une correspondra à la direction de la barre 5 et l'autre à la verticale passant par le point d'intersection ρ des deux éléments 4 et 8. (Nous avons déjà donné (Pl. IV, fig. 57, 58) un exemple de décomposition analogue). Joignant les points τ et π , nous aurons en $\tau\gamma\pi$ la surface des moments et en oec le polygone des forces correspondant. Si par le point o nous menons le rayon of parallèle à la droite $\tau\pi$, nous trouverons en ef et en fc la grandeur des composantes de R_x . La droite ef représentera la valeur de la force 5.

En procédant de la même manière, nous saurons déterminer les efforts agissant dans chacun des éléments de la poutre considérée et nous verrons que dans cette poutre les barres verticales du treillis sont toutes comprimées et les diagonales tendues. Quant à la membrure supérieure, elle se trouve naturellement comprimée, tandis que la membrure inférieure est tendue.

On construit ordinairement ce genre de poutres avec des contrefiches dans les panneaux du milieu ; souvent même on les laisse régner sur toute la longueur, comme l'indique le tracé en pointillés de la partie droite.

Poutre parabolique dont la membrure inférieure se trouve soumise à un effort constant.

La forme de la poutre parabolique représentée (Pl. XVI, fig. 248) a été déterminée de telle manière que tous les éléments composant la membrure inférieure se trouvent soumis à un effort constant.

Prenons dans ce cas le même mode de répartition des charges, la même portée et la même hauteur de construction que dans l'exemple précédent. Le polygone des forces et le polygone funi-

culaire déterminés ci-dessus pourront alors nous servir. Comme nous venons de le démontrer, les bras de levier entrant dans les équations des moments doivent pour chaque section correspondre à la hauteur correspondante de la poutre ; il nous restera donc à déterminer la position des nœuds de la membrure supérieure.

Prenons encore ici la hauteur de construction égale au sixième de la portée $m = \frac{1}{6}l$. Pour trouver la force δ , menons la section $\alpha\alpha$ et établissons l'équation des moments par rapport au point α . Nous aurons :

$$Y_2 \cdot h - \delta \cdot \alpha\delta = 0.$$

D'où :

$$\delta = \frac{Y_2 \cdot h}{\alpha\delta}.$$

Pour la section x_1x_1 , l'axe à considérer sera celui passant par le point β et nous pourrons écrire :

$$Y_4 \cdot h - 18 \cdot m = 0.$$

D'où :

$$18 = \frac{Y_4 \cdot h}{m}.$$

Les efforts dans la membrure inférieure devant rester constants, nous aurons :

$$\delta = 18.$$

ou bien encore :

$$\frac{Y_2}{\alpha\delta} = \frac{Y_4}{m}.$$

c'est-à-dire que les distances des nœuds de la membrure supérieure à la membrure inférieure doivent être dans le même rapport que les ordonnées correspondantes du polygone funiculaire. Ces distances ne sont autres que les grandeurs m_1, m_2, m_3, m déterminées précédemment (fig. 247). Si donc nous portons ces valeurs à partir de la membrure inférieure sur chacune des verticales coïncidant avec les charges I, II, etc., la forme de la membrure supérieure sera parfaitement déterminée.

La charge se trouve-t-elle être dans ce cas uniformément ré-

partie sur toute la projection horizontale de la poutre, les nœuds supérieurs seront alors situés sur une parabole. De là le nom de poutre parabolique.

Si nous déterminons la force extérieure Rx correspondant à la section xx et si nous la décomposons suivant les directions des éléments 4, 5, 6 nous remarquerons que les éléments 4 et 6 se coupent sur la direction de Rx . Les forces 4, 6 et Rx seront donc en équilibre.

La même remarque s'applique à la section x_3x_3 .

De ce qui précède, nous pourrions conclure que les barres de treillis, quelles qu'elles soient, verticales ou diagonales, ne supporteront aucun effort, aussi longtemps que la forme de la poutre et le mode de répartition des charges resteront invariables. Dans ce cas, la forme de la membrure supérieure correspond à l'un des nombreux polygones funiculaires que l'on peut construire avec les forces I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII.

Le pôle du polygone des forces correspondant se déterminera d'une manière excessivement simple, c'est-à-dire en menant par le point e (fig. 245) une parallèle à l'élément 4 compris entre les forces I et II. Le point d'intersection de cette parallèle avec la tension horizontale sera le pôle demandé. Ce point tombant à gauche de la ligne ab , nous pourrions aussi mener une parallèle à l'élément 4 par le point symétrique r et trouver le pôle o' .

Pour trouver en dehors du point ρ un second point de la direction 4, nous construirons l'ordonnée sb du moment correspondant à R_x pris par rapport au milieu de la poutre (fig. 246). Portant en ob (fig. 247) cette grandeur sb et menant la ligne bb' parallèle à xz , nous obtiendrons alors la longueur proportionnelle relative à la poutre (fig. 248), longueur que nous porterons sur la verticale milieu à partir de la membrure inférieure. Nous aurons ainsi en b' un second point de la direction 4 et par suite la position de l'élément très court 4 sera parfaitement déterminée. (Cette construction découle de la construction même de la parabole.)

La tension horizontale co' du polygone des forces représente l'effort constant développé dans la membrure inférieure, et les

rayons pointillés menés par le pôle o' les efforts agissant dans chacun des éléments de la membrure supérieure.

Si la répartition de la charge n'était pas symétrique par rapport à l'axe de la poutre, les barres de treillis seraient alors tendues ou comprimées suivant leur position.

Admettons, par exemple, que les forces $I' = II' = III' = IV'$ agissent sur la moitié gauche de la poutre et supposons de plus $I' < V$. Dans ce cas, le nouveau polygone des forces sera osb ; quant au polygone funiculaire, il différera du précédent seulement sur la partie gauche et aura $\omega\phi$ comme ligne finale (suivre sur l'épure le tracé en pointillés).

Considérons par exemple la section x_2x_2 qui rencontre les éléments 8, 9, 10 et déterminons les forces intérieures développées dans ces barres sous l'action de la nouvelle surcharge.

Pour cela, nous construirons la force extérieure R'_{x_2} correspondant à cette section, et nous la décomposerons suivant des parallèles aux directions 8, 9, 10. R'_{x_2} passe par le point λ , c'est-à-dire par le point de rencontre des deux côtés du polygone funiculaire coupés par la section x_2x_2 (fig. 246); quant à sa grandeur, elle est déterminée en $c'r$ dans le polygone des forces.

Prolongeons (fig. 248) l'élément 9 jusqu'en son point d'intersection e avec la direction R'_{x_2} , joignons e au point de rencontre ρ' des deux autres éléments 8 et 10; portons ensuite la force extérieure R'_{x_2} en $c'r$ et décomposons la suivant les directions 9 et ρe . Les deux composantes auront pour valeurs $9 = c'n$ et $r = r'n$. Cette dernière force r , décomposée suivant les directions des deux autres éléments 8 et 10, nous donnera les forces cherchées, savoir : $8 = ni$ et $10 = r'i$.

En appliquant le même mode de décomposition à toute autre section xx , nous trouverons la valeur des forces intérieures développées dans chaque élément de la poutre, et nous remarquerons que, sous l'influence d'une charge dissymétrique, la membrure inférieure se trouvera soumise à des efforts d'intensité variable.

Poutre en forme de croissant.

La poutre représentée (Pl. XVI, fig. 249) est connue sous la dénomination de poutre en croissant et tire son nom de sa forme même.

La membrure supérieure est identique à celle de la poutre précédente (fig. 248). Quant à la membrure inférieure, elle a également ses ordonnées proportionnelles à celles du polygone funiculaire.

Prenons comme ordonnée milieu de cette membrure le quart de la hauteur de la poutre, c'est-à-dire $\frac{1}{4}m$. Portons cette grandeur en xv (fig. 247) et joignons le point o au point v . Les verticales comprises entre ov et ox représenteront les ordonnées des nœuds de la membrure inférieure.

La forme de la poutre une fois déterminée, nous remarquerons que les éléments des membrures correspondant à une même section verticale prolongée se coupent sur la direction de la force extérieure à cette section. Ainsi pour la section xx les éléments 4 et 6 prolongés se coupent en un point k de la résultante R_x . Nous en concluons que, sous une charge symétrique, les efforts développés dans les diagonales du treillis seront nuls.

Si au contraire nous considérons une section rencontrant une barre verticale, nous observerons que les éléments des deux membrures prolongées ne se coupent pas sur la direction de la force extérieure. Les efforts dans les verticales du treillis ne seront donc pas nuls. Menons la sections x_3x_3 et supposons que la charge se concentre seulement aux nœuds de la membrure supérieure, la force extérieure à cette section sera représentée par R_x . Les éléments 4 et 10 prolongés se coupent en un point d situé à droite de la force extérieure. Appliquons la méthode donnée (fig. 244) et décomposons R_x en deux composantes, l'une passant par d et l'autre par la verticale 7; cette dernière composante représentera la force cherchée. Le moment de R_x par rapport au point d étant positif, celui de 7 sera par suite négatif et la barre

verticale 7 sera tendue, ainsi que nous l'avons indiqué (fig. 249) au moyen de flèches.

Les points b' et b'' servent à déterminer d'une manière plus exacte la direction des éléments 4 et 6. Pour trouver leur position, nous nous sommes reportés à la figure 247 et nous avons employé une méthode analogue à celle donnée à la poutre (fig. 248).

Sous une charge dissymétrique, les diagonales du treillis seront ou bien comprimées ou bien tendues, suivant leur direction et suivant le mode de concentration de la surcharge.

L'épure (fig. 250) donne les efforts dans chaque élément de la construction correspondant à une charge uniformément répartie. Le procédé employé est celui indiqué sous le nom de Méthode de Cremona.

La flèche de la membrure inférieure ayant été prise égale au quart de la flèche de la membrure supérieure, c'est-à-dire égale à $\frac{1}{4}m$, ces deux membrures se trouveront donc à un écartement $\frac{3}{4}m$, qui sera précisément la hauteur de la construction. Au moyen de cette hauteur, nous pourrons trouver facilement la valeur des efforts dans les éléments parallèles 16 et 18. Nous aurons en effet :

$$16 = 18 = \frac{Y_4 \cdot h}{\frac{3}{4}m} = \frac{Y_4 \cdot 2m}{\frac{3}{4}m} = \frac{8}{3}Y_4.$$

Pour les mêmes éléments de la poutre (fig. 248), nous avons trouvé les valeurs suivantes :

$$16 = 18 = \frac{Y_4 \cdot h}{m} = \frac{Y_4 \cdot 2m}{m} = 2Y_4 = \frac{6}{3}Y_4.$$

Les efforts développés dans les éléments horizontaux de ces deux poutres sont alors dans le rapport de $\frac{6}{8}$. La grandeur $o'c$ (fig. 250) est égale à la distance polaire $o'c$ (fig. 245) ; de plus, ao' est égale à $\frac{1}{3}oc'$. La grandeur ao' représentera donc l'augmentation des forces horizontales $16 = 18$ correspondant à la forme parabolique de la membrure inférieure.

On construit aussi les poutres en croissant avec des contrefiches dans les panneaux du milieu. Souvent même ces contrefiches règnent sur toute l'étendue de la poutre.

Poutres multiples.

Poutre à treillis double symétrique.

Dans tous les systèmes de poutres que nous avons examinés jusqu'à présent, une section quelconque ne coupait au maximum que trois éléments, et par suite les efforts intérieurs développés dans chacun d'eux se trouvaient directement déterminés. Il n'en est pas de même pour les poutres où une section rencontrera plus de trois éléments. Dans chaque cas particulier, nous serons forcés d'avoir recours à une hypothèse.

Prenons par exemple la poutre à treillis double (Pl. XV, fig. 233). Cette poutre peut être considérée comme formée par la juxtaposition des deux poutres distinctes, dont les membrures seules coïncideraient. Dans le cas qui nous occupe, les barres de treillis sont parallèles et de plus équidistantes. La disposition du treillis double réduira donc de moitié la distance des nœuds et permettra à la charge de se concentrer en un plus grand nombre de points.

Supposons la hauteur de cette poutre égale au dixième de sa portée $m = \frac{1}{10}l$ et les barres de treillis inclinées à 45° sur l'horizontale ; supposons de plus que la surcharge uniformément répartie se concentre également en chacun des nœuds, comme l'indique le diagramme de répartition. Considérons une section verticale quelconque. Cette section coupant quatre éléments de la poutre, nous ne pourrions employer à la recherche des efforts intérieurs aucune des méthodes données ci-dessus.

Mais si nous admettons que, dans les deux barres de treillis coupées par la section xx , les forces intérieures ont la même intensité, le problème peut alors se résoudre et la méthode donnée pour les poutres à treillis simple est applicable.

Pour trouver la valeur des efforts développés dans les membrures, nous pourrions encore faire une autre hypothèse, consistant à rapporter les moments à un axe équidistant des deux nœuds adjacents à la section considérée. Le moment ainsi déterminé n'est en effet autre que la moyenne arithmétique des moments correspondant à ces deux nœuds.

Ces hypothèses ne sont toutefois justifiées que lorsque la répartition des charges est la même pour les deux poutres juxtaposées.

Dans le cas que nous traitons, il n'en est pas ainsi ; l'un des systèmes (celui tracé en pointillés) n'est chargé qu'en quatre points I', II', III', IV', tandis que l'autre l'est en cinq I, II, III, IV, V, ce qui conduit à déterminer les efforts intérieurs dans chacune des deux poutres. Cette manière de procéder est en effet de beaucoup plus rigoureuse. Les valeurs trouvées dans chaque cas pour les barres de treillis seront directement applicables au système juxtaposé ; quant aux efforts développés dans les éléments coïncidant des membrures, ils seront à ajouter l'un à l'autre.

Construisons à cet effet le polygone des forces *oab* (fig. 234) relatif aux charges I, II, III, IV, V. Prenons comme distance polaire $h=2m$, et traçons (fig. 235) le polygone funiculaire correspondant avec $\rho\varphi$ comme ligne finale. Menons la section *xx* et déterminons les efforts développés dans les membrures. Pour trouver la valeur de la force 2, nous prendrons le point d'intersection α des éléments 3 et 4 comme axe des moments ; et, pour la force 4, le point d'intersection β des éléments 3 et 2. Nous pourrions alors écrire les relations suivantes :

$$2 = \frac{Y_{\alpha} \cdot h}{m} = \frac{ee \cdot h}{m}$$

$$4 = \frac{Y_{\beta} \cdot h}{m} = \frac{ii \cdot h}{m}$$

Mais nous avons pris :

$$h = 2m,$$

d'où :

$$2 = 2 . ee$$

$$4 = 2 . ii.$$

Pour toute autre section xx , nous arriverons au même résultat; nous en concluons donc que l'ordonnée du polygone funiculaire, située en dessous de chaque nœud, prises à l'échelle des forces, donnera, en la multipliant par deux, la valeur de l'effort développé dans l'élément de la membrure qui lui est directement opposé. Cette conclusion n'est toutefois juste que dans le cas où la distance polaire a été prise égale au double de la hauteur de la poutre.

Pour déterminer l'effort agissant dans la barre de treillis 3 rencontrée par la section xx , nous n'aurons qu'à décomposer l'effort tranchant correspondant à cette section suivant une horizontale et une parallèle à la barre 3. Pour les forces I, II, III, IV, V, la surface des efforts tranchants limitée par des traits pleins (Pl. XV, fig. 236) est à considérer. L'effort tranchant entre les charges I et II étant constant, nous pourrons opérer cette décomposition sur l'une quelconque des ordonnées de l'espace rr , par exemple sur l'ordonnée milieu, et nous aurons en $s3$ la valeur de la force cherchée 3. Nous trouverons d'une manière analogue en $s5$ la grandeur de l'effort agissant dans la barre 5. Il en sera de même pour toutes les autres barres de treillis. Pour donner une idée plus claire de la nature de ces efforts, nous avons représenté par un trait double les barres qui travaillent à la compression, et par un trait simple celles qui travaillent à la tension.

Considérons maintenant la deuxième poutre, c'est-à-dire celle dont les barres de treillis sont tracées en traits pointillés. Soient I, II, III', IV' les charges qu'elle supporte et $o a' b'$ le polygone des forces. Supposons les forces I, II, III, IV, V réparties uniformément sur toute la longueur de la poutre, le polygone des forces oab ne changera pas, mais le polygone funiculaire deviendra dans ce cas une parabole, qui sera tangente aux côtés du premier polygone funiculaire tracé. Supposons également les forces I', II', III', IV' réparties de la même manière; à cette répartition correspondra le polygone des forces $oa'b'$. Le polygone funiculaire sera

aussi une parabole identique à la première, mais qui, vu le nombre restreint des charges, ne sera à considérer que dans la partie comprise entre les verticales passant par les charges extrêmes. Cette parabole est également tangente au polygone funiculaire ; elle a en son milieu une tangente horizontale. Supposons maintenant que ces deux paraboles coïncident, nous pourrions alors déterminer facilement la position de cette tangente horizontale. Il résulte en effet de la construction même de la parabole que la droite joignant les milieux des deux tangentes nt et nv ne sera autre que le côté horizontal du polygone funiculaire enveloppe.

Au moyen du polygone des forces $oa'b'$, nous pourrions construire le polygone funiculaire correspondant (suivre le tracé en pointillés) avec $\rho'\phi'$ comme ligne finale. Le polygone des forces $oa'b'$ n'est pas toutefois indispensable, puisque nous savons que les côtés de nouveau polygone funiculaire coupent toujours les côtés du précédent sur la verticale passant par leurs milieux. La ligne finale $\rho'\phi'$ tombe en dessous de la ligne $\rho\phi$ à une distance $\rho\rho' = n\alpha$.

Cherchons maintenant les efforts développés dans les membrures de la seconde poutre. Considérons par exemple la section xx . Pour trouver la force $2'$, nous rapporterons les moments au point γ et pour la force $4'$ au point δ .

D'où les équations :

$$2' = \frac{Y_\gamma \cdot h}{m} = \frac{cc \cdot h}{m}.$$

$$4' = \frac{Y_\delta \cdot h}{m} = \frac{dd \cdot h}{m}.$$

Mais h ayant été pris égal à $2m$, il s'en suit :

$$2' = 2cc$$

$$4' = 2dd.$$

A la simple inspection des deux polygones funiculaires $\rho n\phi$ et $\rho'\alpha\phi'$, nous verrons que les deux ordonnées ee et cc diffèrent de la quantité $2 \cdot \rho\rho'$, tandis que les deux ordonnées ii et dd sont égales.

Toutes les autres forces agissant dans les membrures se trouvent de la même manière.

Pour déterminer les efforts dans les barres de treillis, nous considérerons la surface des efforts tranchants (suivre le tracé en pointillés fig. 236). Pour toutes les sections comprises entre le point d'appui et la force I' , c'est-à-dire pour l'espace ps , l'effort tranchant est constant; il est de plus égal à la réaction. Aussi, pourrions-nous, pour trouver la valeur de la force $3'$ correspondant à la section xx considérer l'une quelconque des ordonnées de l'espace ps , par exemple celle du milieu rq . En opérant comme nous l'avons fait plus haut, nous trouverons en $r3'$ la force cherchée $3'$. Nous déterminerons également, au moyen de la même ordonnée, la force $1' = r1'$.

En continuant de la sorte, nous obtiendrons la valeur des efforts développés dans toutes les barres de treillis.

Pour ne pas confondre les nouveaux résultats avec ceux trouvés pour le premier système, nous les avons tracés en traits pointillés.

Les valeurs ainsi déterminées représentent immédiatement les forces agissant dans les différentes barres de treillis. Quant aux efforts développés dans les membrures, il seront égaux à la somme algébrique des efforts trouvés dans chaque système pour les tronçons coïncidants. Ainsi, dans le système juxtaposé, l'élément $\alpha\delta$ est formé par la réunion des deux barres 4 et $2'$; l'effort dans $\alpha\delta$ sera donc la somme des deux efforts trouvés séparément, et est égale : $4 + 2'$. Il en sera de même pour tout autre tronçon des membrures supérieures et inférieures.

Les quatre tronçons extrêmes font seuls exception et n'ont qu'à résister aux forces $2, 2', 18, 18'$.

Quant au montant vertical correspondant à l'axe de l'appui, il n'a pour but que de rendre possible la juxtaposition de deux systèmes et ne sert qu'à transmettre directement à l'appui la réaction de la poutre tracée en pointillés.

Poutre à treillis quadruple symétrique.

La fig. 237 de la Pl. XV représente une poutre à treillis quadruple symétrique. Cette poutre peut être considérée comme formée par la juxtaposition de quatre poutres à treillis simple. La réunion de ces quatre poutres peut s'opérer au moyen d'un montant vertical passant par l'axe de l'appui, en adoptant indifféremment l'un des deux tracés figurés sur la gauche ou sur la droite du système combiné.

Supposons la hauteur de la poutre prise égale au dixième de la portée $m = \frac{1}{10}l$ et les barres de treillis inclinées à 45° . Supposons de plus égales les charges concentrées en chacun des nœuds, savoir $1=2=3=4=\dots=18=19$.

Ces données une fois établies, nous pourrions construire le polygone des forces (fig. 238), le polygone funiculaire (fig. 240) et la surface des efforts tranchants (fig. 239), correspondant à ces charges.

Considérons une section quelconque xx . Cette section rencontrant les six éléments 1, 2, 3, 4, 5, 6, le problème sera indéterminé ; et nous ne pourrions trouver la valeur des forces intérieures qu'en ayant recours à une hypothèse. A l'examen du mode de répartition, nous observerons que les charges concentrées sont relativement plus petites et plus rapprochées les unes des autres qu'elles ne l'étaient dans la poutre précédente, nous pourrions donc, sans erreur sensible, admettre que les quatre barres de treillis coupées par une section verticale quelconque xx seront également chargées.

Nous déterminerons alors l'effort tranchant correspondant à la section xx et le décomposerons suivant une horizontale et une parallèle à la direction des barres de treillis. En divisant par 4 cette dernière composante, nous obtiendrons la valeur absolue de l'effort développé dans chaque barre de treillis.

A la section xx correspond l'effort tranchant cd qui, sous un angle de 45° , se projette en cf ou en dg . Chacune des barres de

treillis rencontrée par la section xx supportera donc un effort d'intensité $\frac{cf}{4}$ ou $\frac{dg}{4}$.

Pour trouver directement cette valeur, il nous faudrait suivre le tracé en pointillés sur cd . Nous arriverons néanmoins plus rapidement au résultat demandé en construisant la grandeur cf ou dg et en la divisant en quatre parties égales. Le mode de répartition des efforts dans les barres de treillis est en effet connu à l'avance et la valeur numérique reste seule à déterminer. Nous aurons alors :

$$5 = ci = 4 = ik = 3 = kt = 2 = td = \frac{cf}{4}.$$

Les barres de treillis montant du côté du moment maximum fléchissant seront comprimées, les autres tendues.

Les barres 2, 3, 4, 5 ne s'étendent pas seulement sur la longueur d'un seul panneau; les barres 3 et 4 entrent encore dans la composition des barres de treillis constituant le panneau situé à droite de la section xx , tandis que les barres 2 et 5 forment partie intégrante du panneau situé à gauche.

L'effort tranchant change de valeur avec chaque panneau. Ainsi dans le panneau à gauche, il sera plus grand que dans le panneau considéré xx ; par contre, il sera plus petit dans le panneau à droite. La conséquence immédiate de cette variation dans les efforts tranchants nous amènera à admettre que la valeur trouvée $\frac{cf}{4}$ ou $\frac{dg}{4}$ se rapporte aux efforts 3 et 4 seulement. Quant aux forces 2 et 5, elles seront à déterminer au moyen de l'effort tranchant ce correspondant au panneau situé à gauche de la section xx .

Considérons maintenant la section x_1x_1 . Cette section coupe les éléments 7, 8, 9, 10, 11, 12. Soit ab l'effort tranchant correspondant. Les barres 9 et 10 n'étant point parallèles aux autres barres de treillis, il nous faudra alors décomposer ab suivant des parallèles aux éléments 8 et 9, ou bien encore suivant des parallèles à 10 et 11. Dans ce cas $\frac{al}{4} = \frac{bp}{4}$ représentera les efforts 9 et 10

en valeur absolue, et $\frac{ao}{4} = \frac{bq}{4}$ les forces 8 et 11.

Les efforts développés dans toutes les autres barres de treillis se détermineront de même; reste à trouver les efforts développés dans les membrures. Cherchons, par exemple, la valeur des forces 1 et 6. Pour cela, considérons la section xx et rapportons les moments des forces extérieures à un point quelconque de cette section. Nous pourrions de suite remarquer que la valeur du moment résultant variera avec la position de la section xx dans l'espace $\alpha\gamma$. Pour la section α , le moment sera maximum, et pour la section γ , il sera minimum. Mais, comme à une charge donnée correspond une valeur déterminée des forces 1 et 6, cherchons quelle section nous devons considérer.

Pour rendre la démonstration plus facile à suivre sur l'épure, et pour voir plus clairement quelles sont les forces intérieures qui font équilibre aux forces extérieures, nous considérerons la fig. 241 dans laquelle la section xx est supposée menée par le point β .

Soient A, 1, 2, 3, 4, 5, les forces extérieures à cette section. Ces forces ont une résultante commune Rx que nous saurons déterminer en grandeur et en position au moyen du polygone des forces et du polygone funiculaire correspondant. A cette résultante Rx doivent faire équilibre les efforts de tension 3, 5, 6, ainsi que les efforts de compression 1, 2, 4. Or nous savons par hypothèse que les efforts agissant dans les barres de treillis sont égaux entre eux, ainsi que les efforts développés dans les membrures ou autrement dit que :

$$2 = 3 = 4 = 5 \text{ et } 1 = 6.$$

Décomposons les forces 2, 3, 4, 5 en composantes verticales et horizontales. Pour que les forces extérieures et intérieures soient en équilibre, il faut que leurs composantes verticales et horizontales soient aussi en équilibre. La composante horizontale de la résultante Rx étant nulle, la somme algébrique des composantes horizontales des forces intérieures devra donc être égale

à zéro. Désignons par h_2, h_3, h_4, h_5 les composantes horizontales des forces 2, 3, 4, 5 et par v_1, v_2, v_3, v_4 leurs composantes verticales, nous pourrons poser les équations suivantes :

$$-1 - h_2 + h_3 - h_4 + h_5 + 6 = 0,$$

$$Rx - (v_2 + v_3 + v_4 + v_5) = 0.$$

Pour qu'il y ait équilibre, il faut de plus que la somme des moments de toutes les forces pris par rapport à un point quelconque soit égale à zéro. Choisissons, par exemple, le point β ; le moment des forces verticales sera alors nul, et par suite le moment de la résultante Rx devra être égal à la somme des moments des forces horizontales 1, $h_2, h_3, h_4, h_5, 6$. Les efforts dans les barres de treillis étant égaux, les forces h_2 et h_3 ainsi que les forces h_3 et h_4 formeront deux couples d'égale intensité, mais de direction inverse ; ces deux couples se feront équilibre et l'équation des moments pris par rapport au point β se réduira ainsi qu'il suit :

$$Rx \cdot n - 1 \cdot m = 0.$$

D'où :

$$1 = \frac{Rx \cdot n}{m}.$$

Mais nous savons que :

$$Rx \cdot n = Y_\beta \cdot h.$$

D'où l'expression suivante :

$$1 = \frac{Y_\beta \cdot h}{m}.$$

La distance polaire h ayant été prise égale au triple de la hauteur de construction, c'est-à-dire $h=3m$, nous aurons :

$$1 = 3Y_\beta.$$

Si nous choisissons, au contraire, comme axe des moments, l'axe passant par le point δ , nous trouverons la valeur de la force 6.

$$6 = 3Y_\beta.$$

Mais si nous rapportons l'équation des moments au point γ ,

(fig. 237) les moments des composantes horizontales ne se feront plus équilibrer; les couples h_2, h_3 et h_3, h_4 ont en effet tous deux le même signe et sont positifs. L'équation des moments devient alors :

$$Y_\gamma \cdot h - 1 \cdot m + h_2 \frac{m}{2} + h_4 \frac{m}{2} = 0.$$

D'où :

$$1 = \frac{Y_\gamma \cdot h + h_2 \frac{m}{2} + h_4 \frac{m}{2}}{m}$$

Or :

$$h_2 = h_4.$$

D'où :

$$1 = \frac{Y_\gamma \cdot h + h_2 m}{m}. \quad (\text{I})$$

Si maintenant nous établissons l'équation des moments en les rapportant en α , nous verrons que les composantes horizontales h_2, h_3, h_4, h_3 forment deux couples négatifs h_2, h_3 et h_4, h_3 et nous aurons la relation suivante :

$$Y_\alpha \cdot h - 1 \cdot m - h_2 \frac{m}{2} - h_4 \frac{m}{2} = 0.$$

D'où :

$$1 = \frac{Y_\alpha \cdot h - h_2 m}{m}. \quad (\text{II})$$

Additionnons les deux équations (I) et (II); nous aurons :

$$2 \cdot (1) = \frac{Y_\gamma \cdot h + Y_\alpha \cdot h}{m}.$$

D'où :

$$1 = \frac{h(Y_\gamma + Y_\alpha)}{2m} = \frac{h}{m} \left(\frac{Y_\gamma + Y_\alpha}{2} \right)$$

Or :

$$\frac{Y_\gamma + Y_\alpha}{2} = Y_\beta \text{ et } h = 3m.$$

D'où :

$$1 = 3 \cdot Y_\beta.$$

Nous devons donc pour le panneau considéré, choisir comme axe des moments l'axe passant par le point β .

Nous pourrons de la même manière déterminer les efforts développés dans les autres tronçons des membrures.

Combinaison de poutres du premier et du second ordre.

Les poutres à treillis double (fig. 233), à treillis quadruple (fig. 237) (Pl. XV) sont formées, ainsi que nous venons de le voir, par la juxtaposition de 2 ou 4 poutres à treillis simple, juxtaposition qui permet de répartir la charge en un nombre de points double et quadruple. Les poutres à treillis triple, quintuple, sextuple, etc..., pourront se construire de même.

Mais, dans bien des cas, nous pourrons arriver au même but, c'est-à-dire à répartir la charge en un plus grand nombre de points en remplaçant un panneau ou une barre de la poutre primitive par un système triangulé. Un exemple fera comprendre plus clairement la manière de procéder.

Considérons la poutre simple $\gamma\delta\rho\nu\phi\mu\pi$ (Pl. XII, fig. 294). Outre les charges II, IV, VI, cette poutre supporte encore les charges I, III, V, VII avec $\beta, \omega, \eta, \lambda$, comme points d'attache. La membrure supérieure travaillerait donc à la flexion. Pour remédier à cet inconvénient, nous n'aurons qu'à remplacer cette membrure par un système triangulé. Ainsi sur l'élément $\gamma\delta$ agit au point β la force I; par l'adjonction des barres de treillis 3 et 5 nous transformerons le panneau $\gamma\pi\delta$ en un système triangulé $\gamma\beta\delta\pi\alpha$.

Nous pourrons de même transformer chacun des autres panneaux; nous obtiendrons alors la forme de poutre indiquée (Pl. XII, fig. 194, et Pl. XIII, fig. 205) et nous saurons, en appliquant l'une des méthodes données plus haut, déterminer les efforts intérieurs développés dans chacun de ces éléments.

Dans l'exemple traité, (Pl. XV, fig. 242), les charges I, II, III, se concentrent aux nœuds supérieurs, tandis que la membrure inférieure supporte les charges I', II', III'... VII'.

Pour que cette membrure ne se trouve point fléchie, il faudra transformer les panneaux \overline{abr} et \overline{der} en système triangulé du

second ordre. La décomposition des forces correspondant à cette nouvelle forme est tracée Pl. XV, fig. 243.

La forme (Pl. XVII, fig. 258) peut être considérée comme formée par la réunion d'une poutre du premier ordre avec plusieurs poutres du second ordre. Sur la ferme Polonceau agissent directement les charges I=II=III.

Entre deux nœuds consécutifs, les forces I'=II'=III'=IV'=V' ont leur point d'application sur la membrure supérieure. Pour que cette membrure ne soit point fléchie, nous la constituerons au moyen d'une poutre du second ordre. Sur la partie gauche de la ferme nous avons adopté deux poutres en treillis à membrures parallèles et sur la partie droite deux poutres paraboliques.

Les éléments constituant la poutre de premier ordre sont indiqués par les chiffres 1, 2, 3, 4 ; ceux formant partie des poutres du second ordre par les chiffres 1', 2', 3' 4'..... 19', 20', 21'.

Soit Q la charge entière que supporte la ferme considérée. Cette charge se répartira également en chacun des 23 nœuds supérieurs. Les forces I, II, III seront égales entre elles et auront pour valeur $\frac{6}{23} Q$. Chacune d'elles se composera en effet de la charge directement concentrée au nœud considéré et de la demi-somme des forces I', II', III', IV', V', c'est-à-dire :

$$I = II = III = \frac{6}{23} Q.$$

D'où leur somme :

$$I + II + III = \frac{18}{23} Q.$$

Le complément de la charge totale ou $\frac{5}{23} Q$ se trouve directement transmis aux points d'appui.

Pour déterminer dans la ferme Polonceau les efforts résultant de l'action des charges I, II, III, nous porterons sur une verticale les unes à la suite des autres les forces

$$I = cd, II = de, III = ef,$$

d'où :

$$cf = I + II + III = \frac{18}{23} Q.$$

En appliquant une méthode connue, nous trouverons la valeur des forces 1, 2, 3, 4... 11.

Reste à déterminer la valeur des forces intérieures dans les poutres du second ordre. Considérons l'une de ces poutres, par exemple celle partant du point A et aboutissant en I. Cette poutre est soumise à l'action de cinq charges égales $I'=II'=III'=IV'=V'$.

La réaction b de cette poutre en I formant partie de la force totale I qui agit sur la ferme Polonceau, nous la porterons en ch (fig. 259) ; quant à la réaction a , nous la porterons en cg . Le même mode de répartition s'appliquera aux charges ik , op , qr des trois autres poutres.

Les réactions de ces poutres une fois déterminées, il nous sera facile de trouver la valeur des forces 1', 2', 3', 4', 5'.... 20', 21'. Pour cela, nous tracerons le polygone des forces (fig. 259) (suivre la partie en traits fins) ou bien encore le polygone (fig. 260). Ce dernier polygone se trouvant tracé à une échelle double, nous pourrons y lire les résultats avec une plus grande exactitude.

Les deux poutres de gauche étant semblables et ayant de plus les mêmes charges à supporter, le même polygone des forces servira dans les deux cas.

Quant à l'épure relative à la troisième poutre, elle est tracée en pointillés (fig. 259) et répétée (fig. 261) à une échelle double.

Les forces ainsi déterminées donnent immédiatement la valeur des efforts développés dans le treillis et dans les membrures inférieures.

Il n'en est pas de même pour les membrures supérieures ; les résultats trouvés dans chaque cas seront à ajouter. Ainsi le tronçon $\alpha\beta$ entre dans la composition de l'élément 1 de la ferme Polonceau et dans celle de l'élément 4' de la poutre en treillis ; l'effort en $\alpha\beta$ sera par suite égal à la somme des deux forces 1 et 4', savoir :

$$1 + 4' = cv + zx.$$

Les éléments $\gamma\delta$ et $\pi\tau$ ne sont pas à proprement parler nécessaires à la construction et doivent plutôt être considérés comme lien réunissant les poutres du second ordre.

DONNÉES GÉNÉRALES SUR LE POIDS PROPRE

DES DIFFÉRENTES CONSTRUCTIONS ET SUR LES SURCHARGES QU'ELLES PEUVENT AVOIR A SUPPORTER.

Les poutres et supports, employés dans les différentes constructions (toitures, planchers, murs, cloisons, colonnes, etc...), sont soumis à l'action de charges permanentes et de surcharges accidentelles. Les surcharges accidentelles sont de natures différentes et varient avec le genre de construction. Nous comprendrons sous le nom de surcharge accidentelle, dans une charpente : la pression du vent ou de la neige ; dans un plancher ou un pont : une foule compacte ou un amas de matériaux. Par charge permanente, nous entendrons avant tout le poids propre de la poutre ou du support, ainsi que celui de toutes les pièces entrant dans la construction.

Les dimensions à donner à une poutre dépendant de l'influence de la charge permanente et de la surcharge accidentelle, il s'en suit que le poids propre de la pièce dépendra lui-même de la charge permanente et de la surcharge accidentelle. Les réactions des appuis font partie des forces extérieures, comme nous l'avons vu plus haut.

Quant aux surcharges variables, parmi lesquelles nous considérerons toujours la surcharge la plus défavorable, nous pourrions les déterminer d'une manière certaine d'après des résultats d'expériences. La charge permanente, qu'une poutre aura à supporter, pourra aussi se calculer très exactement dans chaque cas particulier. Seul le poids propre de la poutre se déterminera d'une manière approximative. Pour cela, étant donné la nature de la matière employée, nous choisirons à peu près les dimensions à donner à chaque élément entrant dans la construction et nous pourrions ainsi calculer le poids propre de chacun d'eux. Au moyen de cette valeur approchée et de la valeur de la surcharge accidentelle, nous déterminerons les dimensions à donner à chaque pièce, dimensions qui varieront très peu des sections définitives.

Si notre calcul exige une plus grande exactitude, nous pourrons alors opérer sur les nouvelles dimensions, comme nous l'avons fait dans notre première hypothèse, et nous arriverons ainsi à fixer d'une manière rigoureuse les dimensions à adopter.

Toutefois, dans la pratique nous emploierons rarement ce procédé; surtout dans le cas où la surcharge accidentelle l'emportera de beaucoup sur la charge permanente, un écart faible dans les données de cette dernière influant d'une manière peu sensible sur les dimensions de la pièce à calculer. Nous nous permettrons de choisir arbitrairement le poids propre de la pièce même, en nous basant sur les poids connus de constructions analogues.

C'est pourquoi nous résumons dans les tableaux suivants les données des charges permanentes qui nous serviront de bases dans les calculs des différents ouvrages, tels que toitures, planchers, etc.....

Charge permanente.

Poids des matériaux employés dans la construction.

Le poids des matériaux employés dans une construction se trouve en multipliant le volume mis en œuvre par le poids spécifique de la matière. Ainsi un mètre cube de granit de poids spécifique $\gamma = 2,80$ (voir le tableau suivant) pèsera :

$$1. 2,80 = 2^t, 80 \text{ ou } 2,800 \text{ kilos.}$$

TABLEAU N° 1 donnant les poids spécifiques des matières le plus souvent employées.

MATÉRIAUX	POIDS spécifique γ	MATÉRIAUX	POIDS spécifique γ
Grès dur.....	2,50	Fer.....	7,82
Grès ordinaire.....	2,35	Acier cimenté.....	7,79
Pierre calcaire.....	2,45	Acier fondu.....	7,92
Dolomie.....	2,76	Fonte.....	7,21
Marbre.....	2,73	Zinc martelé.....	7,86
Granit.....	2,80	Zinc fondu.....	7,04
Gneiss.....	2,55	Cuivre martelé.....	9,00
Porphyre.....	2,83	Cuivre fondu.....	8,79
Béton.....	2,47	Bronze martelé.....	8,90
Ciment.....	1,66	Bronze fondu.....	8,20
Sable pur.....	1,90	Etain.....	7,38
Glaise.....	1,60	Plomb martelé.....	11,39
Argile.....	1,50	Plomb fondu.....	11,35
Terre végétale.....	1,40	Tilleul sec.....	0,45
Quartz.....	2,62	Peuplier sec.....	0,39
Cailloutis.....	2,55	Aulne sec.....	0,65
Schiste argileux.....	2,53	Poirier sec.....	0,73
Micaschiste.....	2,45	Chêne sec.....	0,91
Basalte serré.....	3,02	Chêne fraîchement abattu.	1,06
Basalte ordinaire.....	2,66	Charme sec.....	0,69
Lave.....	2,62	Charme fraîchement abattu	0,89
Brique à grains serrés....	2,17	Hêtre sec.....	0,59
Brique ordinaire.....	1,81	Hêtre fraîchement abattu.	0,77
Verre à vitres.....	2,64	Mélèze sec.....	0,56
Verre à glaces.....	2,46	Mélèze fraîchement abattu.	0,92
Cristal.....	2,89	Pin sec.....	0,55
Porcelaine.....	2,32	Pin fraîchement abattu...	0,90
Eau.....	1,00	Sapin blanc sec.....	0,55
Maçonnerie en grès fraîche	2,10	Sapin blanc fraîch ^t abattu	0,90
— sèche..	2,00	Sapin sec.....	0,46
Maçonnerie de } fraîche..	2,43	Sapin fraîchement abattu.	0,80
pierre calcaire } sèche....	2,41	Noyer sec.....	0,66
Maçon. en briques fraîche	1,66	Ebène sec.....	1,21
Maçon. en briques sèche..	1,53	Acajou sec.....	0,75
Mortier de chaux.....	1,86		

Poids permanent des toitures au mètre superficiel.

Le tableau suivant donne un résumé de la charge permanente (couverture et ossature) des diverses sortes de toitures en tenant compte de leur inclinaison, c'est-à-dire du rapport $\frac{h}{l}$ de la hauteur h à la portée l .

TABLEAU N° 2. — Toitures avec charpentes en bois.

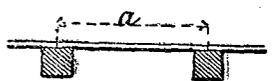
N ^{os}	NATURE de la couverture.	INCLINAISONS ordinairement adoptées $\frac{h}{l}$	POIDS MOYEN en KG par M ²
1	Tuiles plates	$\frac{1}{1} - \frac{1}{2}$	100
2	Tuiles creuses	$\frac{1}{1} - \frac{1}{2}$	125
3	Ardoise	$\frac{1}{2} - \frac{1}{5}$	75
4	Bitume avec revêtement en terre glaise.	$\frac{1}{12} - \frac{1}{16}$	60 — 75.
5	Mastic bitumeux	$\frac{1}{6}$	30
6	Zinc ou tôle galvanisée avec voligeage.	$\frac{1}{6}$	40

Toitures avec charpente métallique.

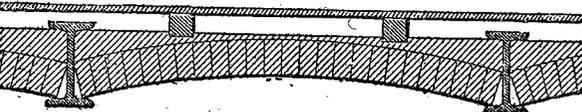
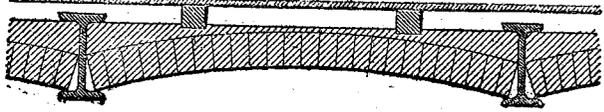
N ^{os}	NATURE de la couverture	INCLINAISONS ordinairement adoptées. $\frac{h}{l}$	POIDS MOYEN en KG par M ²
1	Ardoises sur lattis en cornières.	$\frac{1}{2} - \frac{1}{5}$	50
2	Tôle galvanisée sur lattis en cornières.	$\frac{1}{6}$	25
3	Tôle ondulée sur lattis en cornières	$\frac{1}{6}$	22
4	Zinc sur lattis en cornières	$\frac{1}{6}$	24
5	Cuivre	$\frac{1}{6}$	45
6	Verre.	$\frac{1}{5} - \frac{1}{12}$	60

POIDS PROPRE DES PLANCHERS ET PLAFONDS

TABLEAU N° III. — Plafonds et planchers en bois.

N ^{os}	GENRE DE CONSTRUCTION	POIDS EN KILOG. PAR MÈTRE CARRÉ			
		pour $a = 0,^m90$		pour $a = 1,^m20$	
		DIMENSIONS DES SOLIVES			
		20/25°	25/30°	20/25°	25/30°
1	Plancher simple sur solives 	61	81	56	66
2	Plancher simple sur solives avec plafond en volige 	122	142	112	132
3	Plancher simple sur solives avec plafond en volige et enduit en plâtre. 	279	330	305	376

PLANCHERS EN FERS

N ^{os}	GENRE DE CONSTRUCTION	DÉSIGNATION DES DIFFÉRENTES PARTIES	POIDS EN KIL. PAR MÈTRE CARRÉ	
			Partiels	Totaux
1	Système habituellement employé à Paris (port. 3 ^m ,0 — 8 ^m ,0) 	Hourdis en plâtre. Lambourdes et parquet. Scellement des lambourd. Solives entretoises et fantons.	195 25 25 16-30	261-275
2	Système Vaux (portée 3 ^m ,0 — 8 ^m ,8) 	Même poids que le système n° 1.		261-275
3	Système Thuasne (portée 3 ^m ,0 — 8 ^m ,0) 	Même poids que le système n° 1.		261-275
4	Planchers avec solives en fer I et voûtes en briques pleines 	Voûte et remplissage. Lambourdes et parquet. Fers à I (moyenne).	240 30 30	300
5	Planchers avec solives en fer I et voûtes en briques creuses 	Voûte et remplissage. Lambourdes et parquet. Fers à I (moyenne).	170 30 25	225
6	Système Fox et Barret, pour des portées jusqu'à 6 ^m ,0 	Hourdis. Lambourdes et parquet. Treillage. Fers écartés de 60 c. (moyenne)	190 25 30 25	270

POIDS DES PLANCHERS

PLANCHERS EN PIERRES

Le poids au mètre superficiel de ces planchers doit se calculer d'après le volume mis en œuvre et le poids spécifique des matériaux employés.

Surcharge accidentelle.

Surcharge des chambres d'appartement, salles de réception, magasins, etc.

La surcharge accidentelle varie selon le nombre de personnes et la quantité de marchandises que les pièces sont destinées à recevoir.

Le tableau suivant renferme les chiffres que l'on adopte ordinairement dans ce genre de constructions.

TABLEAU N° IV

Numéros	DÉSIGNATION DES PIÈCES	Surcharge en KG par M ²
1	Maisons ordinaires où les réunions sont peu nombreuses	75
2	Salons et pièces de réception	100
3	Grands salons et pièces de réception.	130
4	Bureaux	130
5	Salons pour les assemblées ordinaires.	200
6	Salons pour les grandes réunions	270
7	Magasins à blés	450
8	Magasins généraux.	750

Surcharge provenant d'une couche de neige.

La surcharge occasionnée sur une toiture par la pluie est insignifiante; il n'en est pas de même pour celle provenant de la neige qui s'amoncelle sur les toits en couches plus ou moins épaisses, suivant la nature des climats.

La couche la plus épaisse tombant sur une surface horizontale peut atteindre une hauteur de 0^m,900 dans le centre de

l'Europe. Or, la neige pesant 10 fois moins que l'eau, à cette hauteur correspondra une nappe d'eau de 0^m,090, et nous pourrons par suite évaluer à 90^k par M² de surface horizontale le poids de la neige.

Sur une surface inclinée, une couche de neige exercera une action moindre et variant avec le degré d'inclinaison de la toiture. Sur une toiture fortement inclinée elle n'exercera plus aucune action, vu qu'elle glisse d'elle-même sous son propre poids.

De plus, dans le calcul d'une toiture, il y aura lieu de tenir compte de la rigueur du climat et de l'endroit où elle doit être établie; c'est pourquoi nous avons résumé dans le tableau suivant les différentes surcharges par M², provenant d'une couche de neige de 0^m,90, 0^m,60, 0^m,30 d'épaisseur pour les inclinaisons ordinairement adoptées. Les valeurs ayant rapport à cette dernière épaisseur sont applicables aux constructions de Paris.

TABLEAU N° 5.

$\frac{h}{l}$	Surcharge de neige en K G par M ² de couverture		
	Couche de 0, ^m 30	Couche de 0, ^m 60	Couche de 0, ^m 90
$\frac{1}{2}$	21	43	64
$\frac{1}{3}$	25	50	75
$\frac{1}{4}$	27	53	80
$\frac{1}{5}$	28	55	83
$\frac{1}{6}$	28	56	84
$\frac{1}{7}$	29	57	86
$\frac{1}{8}$	29	58	87
$\frac{1}{9}$	29	59	88
$\frac{1}{10}$	30	59	89
$\frac{1}{\infty}$	30	60	90

Pression du vent.

La pression que le vent exerce sur une surface normale à sa direction est donnée par la formule suivante :

$$p_{KIL} = 0,116 v^2$$

où v désigne la vitesse du vent exprimée en mètres.

Le tableau suivant résume les valeurs de p correspondant à des vitesses différentes.

TABLEAU N° 6.

NATURE DU VENT	v en M	p en KG
Vent frais ou brise.	4—6	2—4
Très forte brise	10—12	12—17
Vent très fort	15—18	26—38
Vent impétueux	18—22	38—56
Tempête.	22—26	56—78
Tempête violente.	26—32	78—119
Ouragan	36—40	150—180
Grand ouragan	45	235

La valeur de la pression sur une toiture dépend de l'inclinaison de cette dernière et de la nature de la couverture.

Aussi plus la toiture sera plate, plus l'hypothèse suivante sera justifiée.

Nous admettrons en effet que pour une pression de vent quelconque, la composante normale à la surface couverte agit seule sur la construction, et nous ferons abstraction du frottement.

La direction du vent forme ordinairement un angle de 10 degrés avec l'horizontale. Reste à déterminer la valeur de cette pression sur une surface inclinée.

Considérons pour cela la surface *ab* et soit α l'angle qu'elle forme avec l'horizontale. Considérons de plus la surface *cd* perpendiculaire à la direction du vent. Si cette surface *cd* a pour largeur l'unité, la pression sur *cd* aura pour valeur :

$$N = p \cdot cd$$

où *p* désigne la pression normale par unité de surface.

Mais nous avons :

$$cd = ab \cdot \sin (\alpha + 10^\circ)$$

D'où :

$$N = ab \cdot p \cdot \sin (\alpha + 10^\circ)$$

La pression par unité de surface sur *ab* sera donc :

$$r = \frac{N}{ab} = p \sin (\alpha + 10^\circ)$$

Décomposons r suivant une parallèle à la toiture et suivant une verticale. Soit q cette dernière composante, elle aura pour expression :

$$\frac{r}{q} = \frac{\sin(90 - \alpha)}{\sin(\alpha + 10)} = \frac{\cos \alpha}{\sin(\alpha + 10)}$$

D'où en remplaçant r par sa valeur :

$$q = \frac{p \cdot \sin^2(\alpha + 10)}{\cos \alpha}$$

ou bien encore :

$$q = 0,127 v^2 \frac{\sin^2(\alpha + 10)}{\cos \alpha}$$

Le tableau suivant résume les valeurs de q correspondant aux différentes inclinaisons en supposant $v=30^m$.

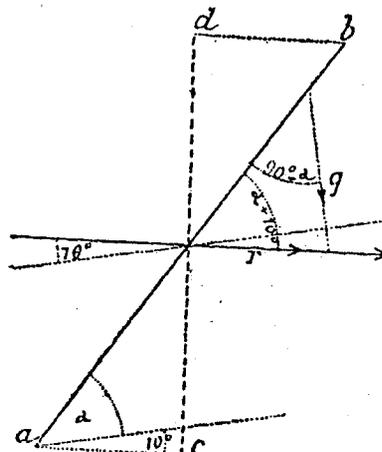
TABLEAU 7.

Numéros	$\frac{h}{l}$	Pression par M ² de couverture p	Numéros	$\frac{h}{l}$	Pression par M ² de couverture p
1	$\frac{1}{0}$	115	6	$\frac{1}{6}$	28
2	$\frac{1}{2}$	109	7	$\frac{1}{7}$	23
3	$\frac{1}{3}$	66	8	$\frac{1}{8}$	20
4	$\frac{1}{4}$	45	9	$\frac{1}{9}$	17
5	$\frac{1}{5}$	34	10	$\frac{1}{10}$	15

EXEMPLES.

Ferme Polonceau à une bielle.

La ferme représentée Pl. XII, fig. 192, a une portée $l=15^m,00$ une hauteur $h=5^m,00$; d'où $\frac{h}{l}=\frac{1}{3}$. Soit $t=4^m,00$ l'écartement de deux fermes voisines.



Sur chaque ferme se concentrera une surface :

$$4 \cdot 2 \cdot \sqrt{7,5^2 + 3^2} = 4 \cdot 2 \cdot 9 = 72 \text{ m}^2.$$

Supposons la couverture faite en ardoises reposant sur un lattis en cornières. La charge permanente par mètre superficiel sera alors de 50 kilos, le poids de la ferme y compris. A l'inclinaison de $\frac{1}{3}$ correspondent une surcharge de neige de 25 kilos et une pression de vent de 66 kilos par mètre carré. (Voir les tableaux II, V, VII).

La charge qui se reporte sur une ferme est alors :

Charge permanente.	50,72 =	3.600 kilos.
Surcharge (neige).	25,72 =	1.800 —
Pression du vent.	66,72 =	<u>4.752 —</u>
TOTAL.		10,152 kilos.

Le quart de cette charge se concentre en chacun des trois points intermédiaires et le huitième seulement à chaque extrémité de la poutre. Ce huitième agissant suivant la verticale passant par les points d'appui s'y transmettra directement et n'exercera aucune influence sur la ferme.

La charge qui se concentre en chaque nœud supérieur est alors :

$$I = II = III = \frac{10152}{4} = 2538 \text{ kilos}$$

D'où la valeur de la réaction des appuis :

$$A = B = \frac{I + II + III}{2} = \frac{3 \cdot 2538}{2} = 3807 \text{ kilos.}$$

Nous avons expliqué dans le courant de cet ouvrage la manière de déterminer les efforts intérieurs développés dans chaque élément d'une construction de ce genre ; aussi nous bornerons-nous ici à consigner dans le tableau suivant les résultats relevés sur l'épure (fig. 193).

1 = 10 = — 9920 kilos	2 = 11 = 8400 kilos
3 = 9 = — 2160 —	5 = 8 = 4140 —
4 = 7 = — 8480 —	6 = 4740 —

Les forces A et B sont les forces extérieures ou réactions qui sollicitent la ferme. La charge totale qui se reporte sur chaque appui est plus grande que chaque réaction ; elle est égale à la moitié de la charge totale d'une ferme, c'est-à-dire $\frac{10152}{2} = 5,076$ kilos.

Des efforts dans une ferme Polonceau à une seule bielle, le vent étant supposé n'agir que sur un seul côté de la toiture.

Nous avons donné (Pl. XII, fig. 199 et 200) l'épure d'une ferme Polonceau à une seule bielle, dans le cas où le vent est supposé ne frapper que sur un côté de la toiture. Cette ferme a la même portée, la même hauteur que la ferme (Pl. XII, fig. 192) ; elle supporte de plus les mêmes charges.

Le vent agit d'un seul côté et perpendiculairement à la surface de la couverture ; toutefois, pour plus de simplicité, nous n'avons considéré que la composante verticale du vent agissant sur la ferme. Cette hypothèse n'est pas rigoureuse, il est vrai ; mais l'erreur ainsi commise est insignifiante, surtout pour des toitures peu inclinées.

Pour faire ressortir la différence avec le cas traité ci-dessus, nous avons pour la ferme (fig. 199) construit le polygone des forces (fig. 200), en y introduisant les efforts normaux dus au vent.

Dans ce cas, les charges sont les suivantes :

En chaque nœud supérieur se concentre 1350 kilos correspondant à la charge permanente et à la surcharge de neige. L'effort normal dû au vent est pour le point α , 1190 kilos ; pour le point β , il est moitié moindre, c'est-à-dire 595 kilos.

Désignons par I, II, III, les forces provenant de la charge permanente et de la surcharge de neige, par I', II' les efforts du vent.

Avant tout, il nous faut déterminer la direction des réactions qui, dans ce cas, ne sont plus verticales et forment un certain angle avec la verticale. Les surfaces des appuis sont-elles hori-

zontales, c'est alors le frottement qui tiendra en équilibre la composante horizontale de la pression du vent.

Supposons pour un instant que, sous la pression du vent, la ferme arrive à se déplacer, dans ce cas la résultante formera avec la verticale, passant par les points d'appui, un angle égal à l'angle de frottement des corps en contact, et toute la résistance possible due à ce frottement s'opposera au mouvement.

Supposons, au contraire, qu'aucun déplacement n'ait lieu, alors le frottement n'entrera en ligne de compte qu'autant qu'il sera nécessaire pour établir l'équilibre.

Mais si la somme des composantes horizontales des efforts agissant sur la ferme est plus grande que la résistance due au frottement, il n'y aura plus d'équilibre possible. Dans ce cas, il ne suffira pas de faire reposer simplement la ferme sur ses appuis, il faudra rétablir l'équilibre d'une autre manière, par exemple au moyen d'une butée ou d'un ancrage capable de résister à un effort horizontal. Les composantes horizontales des réactions A et B doivent alors être égales à la somme des composantes horizontales des efforts obliques I' et II'. Mais les composantes horizontales nécessaires à l'équilibre ne sont pas égales entre elles, puisque l'intensité de la résistance due au frottement ne dépend pas seulement du coefficient de frottement des corps au contact, mais encore de la grandeur de la pression verticale en chaque point d'appui.

Sous l'action de la surcharge permanente et de la surcharge de neige, les réactions en chaque point d'appui sont égales entre elles et ont pour valeur $bp = \frac{I+II+III}{2} = 2,020$ kilos.

Il n'en est pas de même des composantes verticales dues à l'action du vent. Ainsi, $\frac{3}{4}$ de la composante verticale de I' se transmettent en A et $\frac{1}{4}$ en B, tandis que la composante verticale de la force II' se transmet par moitié en A et en B.

Nous avons tracé au point α la décomposition de la force I' en

une composante horizontale $h = 733$ kilos, et en une composante verticale $v = 447$ kilos. La force II' étant égale à la moitié de I' , il s'en suit que les composantes seront dans le même rapport ; cette décomposition se trouve également tracée au point β . Les réactions dues à ces composantes verticales auront donc pour valeur à gauche ;

$$\frac{3}{4}v + \frac{1}{4}v = pq,$$

à droite :

$$\frac{1}{4}v + \frac{1}{4}v = ps. = \frac{1}{2}v$$

Les lignes bq et bs représentent les composantes verticales des réactions A et B.

Quant à la somme des composantes horizontales, elle se partage en A et en B dans le rapport $\frac{bq}{bs}$.

Ce rapport peut se construire facilement ; pour cela, portons sur bs la somme $b\beta$ des composantes horizontales de II' et de I' , menons par β une verticale et portons sur elle en βq la composante verticale de la réaction A. La droite joignant les points s et q partagera l'horizontale $b\beta$ dans le rapport cherché. Les composantes verticales et horizontales des réactions une fois déterminées, nous pourrons les trouver de suite en grandeur et en direction, et nous aurons :

$$A = ab = 3800 \text{ kilos.}$$

$$B = bk = 1800 \text{ —}$$

Reste à déterminer les efforts développés dans chaque élément de la ferme. Pour cela, nous porterons (Pl. XII, fig. 200) en ab la réaction A et nous la décomposerons en $1 = ac$ et $2 = bc$. Passant alors au point α , nous chercherons la résultante des forces connues $1 = ac$; $I = am$ et $I' = md$, et nous la décomposerons ensuite suivant les directions 3 et 4, et ainsi de suite jusqu'à ce que nous ayons trouvé les forces $10 = hk$ et $11 = hb$, dont la résultante doit être égale et parallèle à la réaction B.

Les réactions A et B étant parallèles, les points a , b et k devront nécessairement tomber sur une seule et même droite.

Les résultats de la construction relevés sur l'épure sont groupés dans le tableau suivant :

1 = <i>ac</i> = - 8260 kilos	2 = <i>bc</i> = 7560 kilos
3 = <i>ce</i> = - 2320 —	5 = <i>ef</i> = 4200 —
4 = <i>ed</i> = - 7500 —	6 = <i>fb</i> = 3750 —
7 = <i>gi</i> = - 5540 —	8 = <i>gf</i> = 3650 —
9 = <i>gh</i> = 1150 —	11 = <i>hb</i> = 6760 —
10 = <i>hk</i> = - 8300 —	

Si nous comparons les résultats ci-dessus avec ceux trouvés pour la ferme (fig. 192), nous verrons que toutes les forces intérieures à l'exception de 3 et 5 ont une intensité moindre.

Ici encore les forces A et B, qui sollicitent la ferme, sont plus petites que les charges qui se concentrent en chaque point d'appui.

Ferme Polonceau à trois bielles.

La ferme Polonceau (Pl. XII, fig. 194) a une portée $l = 20,^m00$ et une hauteur $h = 5,^m00$; d'où le rapport $\frac{h}{l} = \frac{1}{4}$. Les fermes étant placées à un écartement $t = 5,^m00$, chacune d'elle portera une surface :

$$5 \cdot 2 \cdot \sqrt{10^2 + 5^2} = 5 \cdot 2 \cdot 11,18 = 111^m2,8$$

soit en chiffres ronds 112^m2 .

Supposons la couverture en tôle galvanisée assujettie sur des cornières. La charge permanente par mètre superficiel sera alors de 25 kilos. (Voir le tableau II). Quant aux surcharges, celle due à la neige sera de 27 kilos et celle due à l'action du vent de 45 kilos par mètre carré. (Consulter le tableau V et VII).

La charge totale se reportant sur une ferme pourra s'estimer ainsi qu'il suit :

Charge permanente.. . . .	25.112 =	2800 kilos.
Surcharge (neige).. . . .	27.112 =	3024 —
Pression due au vent.. . . .	45.112 =	<u>5040 —</u>
TOTAL. . .		10864 kilos.

Les forces agissant en chaque nœud supérieur seront :

$$I = II = III = IV = V = VI = VII = \frac{10864}{8} = 1358 \text{ kilos}$$

et les réactions :

$$A = B = \frac{7 \cdot 1358}{2} = 4753 \text{ kilos.}$$

Nous avons établi (page 136), par la méthode dite des moments statiques, les équations donnant les efforts dans chaque élément de cette ferme, nous n'aurons donc plus qu'à calculer la longueur des différents bras de levier et à remplacer dans lesdites équations les lettres par leurs valeurs numériques.

Avant tout, il nous faut déterminer les bras de levier.

L'arbalétrier a, comme nous l'avons vu plus haut, une longueur :

$$\gamma p = 4n = \sqrt{10^2 + 5^2} = 11,^m18$$

d'où :

$$2n = 5^m,59$$

$$n = 2^m,795.$$

Quant à l'écartement des pannes, mesuré suivant l'horizontale, il est :

$$m = 2^m,50.$$

D'où :

$$2m = 5^m,00$$

$$3m = 7^m,50$$

$$4m = 10^m,00.$$

Désignons (Pl. XII, fig. 198) par x la distance horizontale des points π et δ , nous pourrions mesurer cette longueur x ou encore la calculer au moyen des triangles semblables $d\pi\delta$ et $\delta a\gamma$.

Nous aurons en effet :

$$\frac{x}{\delta a} = \frac{\delta d}{\gamma a}$$

ou bien :

$$\frac{x}{2,5} = \frac{1,5}{5}.$$

La valeur cherchée sera :

$$x = \frac{1,5 \cdot 2,5}{5} = 0^m,75.$$

D'où :

$$\frac{x}{2} = 0^m,375.$$

Soit y la distance des points π et δ .

Cette longueur peut ou bien se mesurer directement ou encore se calculer au moyen de triangles semblables $\pi\delta d$ et $\delta a\gamma$, qui donnent la relation suivante :

$$\frac{y}{\delta d} = \frac{2n}{2m} \quad \text{ou :} \quad \frac{y}{1,5} = \frac{5,59}{5}$$

La valeur de y tirée de cette équation est :

$$y = \frac{1,5 \cdot 5,59}{5} = 1^m,677$$

D'où :

$$\frac{y}{2} = 0^m,8385$$

Nous obtiendrons de même la longueur de la perpendiculaire abaissée du point δ sur la droite $\pi\gamma$. Nous pouvons, en effet, écrire la proportion :

$$\frac{z}{y} = \frac{2 \cdot n}{2 \cdot q}$$

où q représente la longueur $\gamma\pi$ et a pour valeur :

$$2q = \sqrt{1^2 + 5 \cdot 75^2} = 5^m,837$$

Nous aurons par suite :

$$z = 1,677 \frac{5,59}{5,837} = 1^m,606.$$

D'où :

$$2z = 3^m,212$$

$$\frac{z}{2} = 0^m,803.$$

Remplaçant alors par leurs valeurs les lettres dans les équations établies à la page 136, nous trouverons l'intensité des efforts développés dans chaque élément, savoir :

$$1 = \frac{A \left(m + \frac{x}{2} \right)}{\frac{y}{2}} = \frac{4760 + 2,875}{0,838} = - 16322 \text{ k}^{\text{cs}}$$

$$2 = \frac{A \cdot m}{\frac{z}{2}} = \frac{2,5 \cdot 4760}{0,803} = 14819,4$$

$$3 = \frac{I \cdot m}{n} = 11 = \frac{1360 \cdot 2,5}{2,795} = - 1216,4$$

$$4 = \frac{A \left(m + \frac{x}{2} \right) - I \cdot \frac{x}{2}}{\frac{y}{2}} = \frac{4760 \cdot 2,875 - 1360 \cdot 0,375}{0,8385} = - 15712,6$$

$$5 = \frac{I \cdot m}{z} = \frac{1360 \cdot 2,5}{1,606} = 2116,1$$

$$6 = \frac{A \cdot 2m - I \cdot m}{z} = \frac{4760 \cdot 5 - 1360 \cdot 2,5}{1,606} = 12712,6$$

$$9 = \frac{III \cdot m}{z} = 5 = 2116,1$$

$$7 = \frac{I \cdot 3m + 9 \cdot z}{2n} = \frac{1360 \cdot 7,5 + 2116,1 \cdot 1,606}{2 \times 2,795} = - 2432,6$$

$$8 = \frac{A(2m + x) - I(m + 2x) + 9 \cdot z}{y}$$

$$8 = \frac{4760 \cdot 5,75 - 1360 \cdot 4 + 2116,1 \cdot 1,606}{1,677} = - 1551,5$$

$$14 = \frac{A \cdot 4m - I \cdot 6m}{\frac{4}{5}h} = \frac{4760 \cdot 10 - 1360 \cdot 15}{4} = 6800$$

$$10 = \frac{I \cdot 3m - 9 \cdot z - 14 \cdot h}{2 \cdot z} = \frac{1360 \cdot 7,5 - 2116,1 \cdot 1,606 - 6800 \cdot 1}{3,212} = 6350,7$$

$$12 = \frac{A(2m + x) - I \cdot 3x}{y} = \frac{4760 \cdot 5,75 - 1360 \cdot 2,25}{1,677} = - 14496,1$$

$$13 = \frac{I \cdot 6m + 14 \cdot \frac{h}{5}}{2z} = \frac{1360 \cdot 15 + 6800 \cdot 1}{3,212} = 8468,2$$

La détermination graphique de ces forces se trouve également indiquée (Pl. XII, fig. 195). Le procédé n'offre rien de particulier, si ce n'est pour le point δ . En effet, la résultante ad des forces

connues 5, 4, II doit être décomposée suivant les trois directions 7, 9, 8, qui se coupent au même point. Le problème se trouve par conséquent indéterminé. Pour le résoudre, il nous faut avoir recours à une hypothèse, et nous poserons la condition $5=9$. Nous mènerons par les points a et d des parallèles aux forces 7 et 8 et tracerons entre 7 et 8 la force $bc=9$, symétriquement à la force 5.

Fermes employées dans le cas de faibles portées

La ferme représentée (Pl. XII, fig. 201) a une portée $l=10^m,00$, une hauteur $h=4^m,00$, d'où le rapport $\frac{h}{l}=\frac{2}{5}$. Supposons la couverture faite en ardoises, le poids permanent sera alors de 50 kilos par M^2 ; quant aux surcharges, celle due à la neige, de $53^k,5$, et celle due au vent, de $87,5$ par M^2 .

Si les fermes se trouvent placées à un écartement $t=3^m,00$, chacune d'elle portera une surface :

$$9 \cdot 2\sqrt{5^2 + 4^2} = 3 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 2 = 37^{m},2$$

La charge qui se concentrera sur une ferme pourra s'évaluer ainsi :

Charge permanente.	50	. 37,2	= 1860 kilos.
Surcharge (neige).	53,5	. 37,2	= 1990 —
Pression due au vent.	87,5	. 37,2	= <u>3255</u> —
TOTAL.			7105 kilos.

Les forces agissant en chaque nœud supérieur seront :

$$I = II = III = \frac{7105}{4} = 1776^k,2.$$

D'où la valeur des réactions :

$$A = B = \frac{3 \times 1776,2}{2} = 2,665^k,5.$$

L'épure correspondant à ce cas est tracée (Pl. XII. fig. 202).
Le tableau suivant résume les résultats trouvés :

1 = 8 = \neg 4310 kilos.	2 = 9 = 3370 kilos.
4 = 6 = — 2860 —	5 = 1776 —
3 = 7 = — 1450 —	

La ferme représentée (Pl. XII, fig. 203) a la même portée et la même hauteur que la ferme précédente et se trouve de plus soumise à l'influence des mêmes charges.

Nous supposerons ici que la ferme proprement dite est la poutre $abcd$ et que la charge II se rapporte aux points b et c par l'intermédiaire des arbalétriers be et ec . Les arbalétriers peuvent donc être considérés comme nécessités par la forme à donner à la toiture.

Portons (Pl. XII, fig. 204) la force II en or et décomposons-la suivant des parallèles aux éléments be et ec . Les droites $os = 5'$ et $sr = 6'$ représenteront les forces reportées aux points b et c par l'intermédiaire de be et de ec .

Reste à déterminer les efforts dans la poutre $abcd$. Nous en tracerons facilement l'épure en observant qu'au point b agissent les forces I et $5'$ et au point c , les forces III et $6'$.

Pour cela, portons en qt la réaction $A = \frac{I+II+III}{2}$ et décomposons-la suivant les directions 1 et 2. La force 1 composée avec I et $5'$ a pour résultante $vs = 3$; de même la force 3, composée avec III et $6'$ donnera la force $vn = 4$. Cette dernière, composée avec 2, devra nécessairement avoir pour résultante la réaction B.

Le tableau suivant résume les résultats relevés sur cette épure :

$1 = 4 = - 4310$ kilos.	$5' = - 1420$ kilos.
$3 = - 2270$ —	$6' = - 1420$ —
$2 = 3370$ —	

Si nous comparons ces résultats avec ceux trouvés pour la ferme (fig. 201), nous verrons que l'avantage est pour cette dernière. Par contre, la ferme (fig. 203) se compose d'un nombre moindre d'éléments. Mais cette ferme, pour ne pas travailler à la flexion, doit toujours se trouver surchargée symétriquement par rapport à son axe. Si donc nous posons comme condition que les éléments constituant cette ferme ne doivent résister qu'à des efforts de traction et de compression, il s'en suit que nous ne pourrions employer ce mode de construction que dans le cas où elle se

trouvera à l'abri du vent, par exemple pour couvrir une cour entourée de murs.

Comparaison de quelques systèmes de fermes

Les fermes représentées fig. 205, 207, 209 et 211, Pl. XIII, ont toutes même portée, même hauteur, et supportent de plus les mêmes charges. Elles ne diffèrent que par la disposition des barres de treillis. La première de ces fermes est une ferme Polonceau, la troisième et la quatrième sont du système anglais ; quant à la deuxième, elle a toutes ses barres de treillis inclinées sur la verticale.

Pour comparer ces différents systèmes, nous les traiterons tous quatre ensemble.

La portée de ces fermes est $l = 25^m,00$, leur hauteur $h = 5^m,00$, d'où le rapport $\frac{h}{l} = \frac{1}{5}$. Deux fermes successives de même système sont placées à un écartement $t = 6^m00$.

Si nous supposons la toiture en tôle plane galvanisée, assujettie sur des cornières, nous pourrions évaluer les charges au mètre superficiel ainsi qu'il a été dit plus haut.

Charge permanente.	25 kilos.
Surcharge (neige)..	28 —
Pression due au vent.	34 —
TOTAL.	87 kilos.

Chaque ferme portera une surface :

$$6 \cdot 2\sqrt{5^2 + 12,5^2} = 6 \cdot 2 \cdot 13,5 = 162 \text{ M}^2$$

ou bien un poids de

$$162 \cdot 87 = 14094 \text{ kilos.}$$

Les charges agissant en chaque nœud supérieur seront :

$$I = II = III = IV = V = VI = VII = \frac{14094}{8} = 1761^k,75.$$

D'où la valeur de réaction :

$$A = B = \frac{1761,75 \cdot 7}{2} = 6166^k,12.$$

Les épures correspondant à chacune de ces fermes sont tracées (Pl. XIII, fig. 206, 208, 210 et 212), et le tableau suivant résume les résultats relevés sur ces épures :

FERME POLONCEAU fig. 205 et 206	FERME A TREILLIS INCLINÉS fig. 207 et 208	FERME ANGLAISE fig. 209 et 210	FERME ANGLAISE fig. 211 et 212
<i>Arbalétriers</i>			
1 = 26 = - 16600 k.	1 = 26 = - 16600 k.	1 = 25 = - 16600 k.	1 = 26 = - 16600 k.
4 = 22 = - 15950	4 = 22 = - 15040	4 = 22 = - 14250	4 = 22 = - 16600
8 = 18 = - 15300	8 = 18 = - 12800	5 = 18 = - 11900	8 = 18 = - 14210
12 = 15 = - 14650	12 = 15 = - 10500	10 = 14 = - 9550	12 = 15 = - 11820
<i>Entrraits</i>			
2 = 27 = 15440 k.	2 = 27 = 15440 k.	2 = 24 = 15440 k.	2 = 27 = 15440 k.
6 = 24 = 13220	6 = 24 = 13210	8 = 20 = 13260	6 = 24 = 13210
14 = 8780	10 = 20 = 10980	12 = 16 = 11080	10 = 20 = 10980
	14 = 8750		14 = 8750
<i>Barres de treillis comprimées</i>			
3 = 25 = 11 = 17 = - 1640 k.	3 = 25 = - 1840 k.	3 = 23 = - 2300 k.	3 = 35 = - 1760 k.
7 = 21 = - 3280	7 = 21 = - 2500	7 = 19 = - 2860	7 = 21 = - 2670
	11 = 17 = - 3280	11 = 17 = - 3180	11 = 17 = - 3520
<i>Barres de treillis tendues</i>			
5 = 9 = 19 = 23 = 2220 k.	5 = 23 = 1400 k.	5 = 21 = 900 k.	5 = 23 = 2840
10 = 20 = 4440	9 = 19 = 2300	9 = 17 = 1800	9 = 19 = 3480
13 = 16 = 6660	13 = 16 = 3200	13 = 5400	13 = 16 = 4180

Poutre à treillis symétrique

Soit $l = 20^m$ la longueur de la poutre représentée Pl. XIV, fig. 213, et $h = 2^m$ sa hauteur ; le rapport entre la portée et la hauteur est donc $\frac{m}{l} = \frac{1}{10}$.

Soit de plus $I = II = III = IV = V = 4^t$, les forces qui agissent aux nœuds supérieurs. Les réactions des points d'appui auront par suite pour valeur $A = B = 10^t$.

Construisons (fig. 214) le polygone des forces avec une tension horizontale $h = 2m$ et (fig. 215) le polygone funiculaire correspondant. Les ordonnées tracées dans ce dernier représenteront alors les efforts développés dans les membrures à une échelle deux fois trop grande, et nous aurons :

$$\begin{array}{ll} 2 = 18 = 10^t & 4 = 16 = -16^t \\ 6 = 14 = 22 & 8 = 12 = -24 \\ 10 = 26 & \end{array}$$

La construction des efforts agissant dans les barres de treillis se trouve indiquée (fig. 216). Ces efforts sont représentés par des traits, soit doubles, soit simples, suivant que la barre de treillis correspondante est comprimée ou tendue. Les indices placés au milieu (fig. 216) correspondent à la poutre (fig. 213). Le tableau suivant résume les valeurs relevées sur l'épure, savoir :

$$\begin{array}{ll} 1 = 19 = -14^t,15 & 3 = 17 = 8^t,49 \\ 5 = 15 = -8,49 & 7 = 13 = 2,83 \\ 9 = 11 = -2,83 & \end{array}$$

Poutre en treillis avec montants travaillant à la compression

La poutre représentée (Pl. XIV, fig. 217) a la même portée, la même hauteur que la poutre (fig. 213); elle se trouve, de plus, soumise à l'action des mêmes charges, d'où :

$$l = 20^m \quad ; \quad h = 2^m \\ I = II = III = IV = V = 4^t \quad ; \quad A = B = 10^t$$

Les ordonnées du polygone funiculaire (fig. 216) représentent les efforts dans les membrures en double grandeur puisque $h = 2m$. Les indices supérieurs de la partie gauche se rapportent à ce cas, savoir :

$$\begin{array}{ll} 2 = 36 = -10^t & 7 = 34 = 10^t \\ 4 = 32 = -16 & 10 = 30 = 16 \\ 8 = 28 = -22 & 14 = 26 = 22 \\ 12 = 24 = -24 & 18 = 22 = 24 \\ 16 = 20 = -26 & \end{array}$$

Les efforts développés dans les barres de treillis sont indiqués

sur la partie gauche de la (fig. 216), également au moyen de lignes de pointillés doubles et simples. Les indices inclinés se rapportent aux barres inclinées et les indices droits inférieurs aux montants. Le tableau suivant résume les valeurs de ces efforts :

$$\begin{array}{ll} 1 = 37 = 14^t, 15 & 3 = 35 = - 10^t \\ 5 = 9 = 33 = 29 = 8, 49 & 7 = 11 = 27 = 31 = - 6 \\ 13 = 17 = 21 = 25 = 2, 83 & 15 = 23 = - 2 \\ & 19 = - 4 \end{array}$$

Les mêmes valeurs se trouvent également dans le polygone des forces (fig. 219). Ainsi, par exemple :

$$\begin{array}{l} 10 = 30 = 4 = 32 = 2 \cdot Y\alpha = 2 \cdot 8^t = 16^t \\ 24 = 26 = 8 = 28 = 2 \cdot Y\beta = 2 \cdot 11^t = 22^t \end{array}$$

Poutre en treillis avec montants travaillant à la traction

La poutre représentée (Pl. XIV, fig. 218) a également la même portée et la même hauteur que les précédentes, et porte les mêmes charges, c'est-à-dire :

$$\begin{array}{l} l = 20^m \quad ; \quad m = 2^m \\ I = II = III = IV = V = 4^t \quad ; \quad A = B = 10^t \end{array}$$

Les efforts développés dans les membrures sont tracés en traits pleins sur la partie gauche de la (fig. 215) ; mais, cette fois, les indices inférieurs sont à considérer.

Quant aux efforts agissant dans les barres de treillis, ils se trouvent indiqués (fig. 215) au moyen de traits pointillés et à gauche.

Les valeurs relevées sur l'épure donnent pour les membrures :

$$\begin{array}{ll} 32 = 4 = - 10^t & 36 = 2 = 10^t \\ 8 = 28 = - 16 & 34 = 6 = 16 \\ 12 = 24 = - 22 & 30 = 10 = 22 \\ 16 = 20 = - 24 & 26 = 14 = 24 \\ & 18 = 26 \end{array}$$

pour le treillis :

$$\begin{array}{ll} 37 = 1 = - 14^t, 15 & 35 = 31 = 3 = 7 = 6^t \\ 33 = 29 = 5 = 9 = - 8, 49 & 27 = 23 = 11 = 15 = 2^t \\ 25 = 21 = 13 = 17 = - 2, 83 & \end{array}$$

**Épure d'une ferme composée de poutres
de plusieurs systèmes**

Soit (Pl. XIV, fig. 220) une toiture représentée par ses trois projections, ayant en plan 35^m de longueur et 28^m de largeur, et ayant en élévation comme plus grande hauteur :

$$h + h_1 = 3^m,5 + 2^m,333 = 5^m,833.$$

Les deux fermes principales qui composent cette toiture sont dessinées (fig. 220) à une échelle double, et l'une d'elle se trouve indiquée en plan par les lettres *mn*. La poutre principale est représentée dans l'élévation par la ligne brisée *mbrn*, quant à la poutre *bkr*, elle ne constitue à proprement dire qu'un couronnement exigé par la forme de la couverture.

Les deux fermes principales se trouvent placées à un écartement de 20^m et sont réunies entre elles par l'intermédiaire de deux poutres en treillis de 20^m de portée et aux murs de clôture par quatre poutres de 7^m 50 de portée. Ces poutres ont une hauteur de 3^m,50 et sont désignées en plan par *bp* et *bz* ; elles sont de plus dessinées à une échelle double [(Pl. XIV, fig. 229) et (Pl. XV, fig. 231)].

L'espace compris entre les deux fermes principales et les poutres en treillis sur une longueur de 20^m et une largeur de 14^m doit rester libre, ainsi que ceux compris entre les poutres en treillis et les murs de clôture sur une longueur de 14^m et une largeur de 7^m 50.

Cette toiture ainsi qu'on peut le voir se composera donc de 7 fermes Polonceau à une seule bielle (fig. 223) et de 7 fermes de la forme indiquée (fig. 225).

Si nous supposons maintenant que l'espace compris entre les poutres en treillis doit être vitré et le reste couvert en tôle ondulée galvanisée et si nous choisissons comme rapports de la hauteur à l'ouverture des supports $\frac{1}{6}$ pour la partie vitrée et $\frac{1}{4}$ pour

la partie couverte en tôle ondulée, nous pourrions estimer ainsi qu'il suit les charges au mètre superficiel de couverture.

Partie vitrée :

Charge permanente	60 kilos.
Surcharge (neige)	56 —
Pression du vent	28 —
TOTAL	144 kilos.

Partie couverte en tôle ondulée :

Charge permanente	24 kilos.
Surcharge (neige)	53 —
Pression du vent	45 —
TOTAL	122 kilos.

Nous avons représenté sur la gauche du plan au moyen de lignes pointillées les différentes surfaces qui se reportent sur chaque poutre.

Les fermes principales mn portent en plus chacune la moitié du poids des poutres en treillis, qui s'attachent sur elles. De même la poutre bp portera en plus la demi-charge provenant des cinq fermes Polonceau et des cinq autres fermes plus petites. Quant à la poutre bz , elle se trouvera encore chargée par la ferme Polonceau tv et la poutre st .

Il nous reste à déterminer les efforts intérieurs pour chaque élément entrant dans la construction. Pour cela, calculons la largeur de la toiture suivant l'inclinaison. Nous aurons :

$$mb = \sqrt{ma^2 + h^2} = \sqrt{7^2 + 3,5^2} = 7^m825$$

$$bk = \sqrt{ba^2 + h^2} = \sqrt{7^2 + 2,33^2} = 7^m,375.$$

1° Calcul de la ferme ef (fig. 223) :

Les forces agissant sur cette ferme sont :

$$I_1 = II_1 = III_1 = 3,333 \cdot 3,68 \cdot 144 = 1770^k$$

et les réactions des appuis :

$$A_1 = B_1 = I_1 + II_1 + III_1 = 3 \cdot \frac{1}{2} 1770 = 2655^k.$$

Le polygone des forces (fig. 224) nous fournit les résultats suivants :

$$\begin{array}{ll} 1 = 14 = -8420 \text{ kil.} & 2 = 10 = 8000 \\ 4 = 8 = -7850 \text{ —} & 6 = 5340 \\ 3 = 9 = -1670 \text{ —} & 5 = 7 = 2650 \end{array}$$

2° Calcul de la ferme *ce* (fig. 225) :

$$I_{II} = 3,333 \cdot 3,912 \cdot 122 = 1589^k$$

$$A_{II} = B_{II} = \frac{I_{II}}{2} = 794^{k,5}$$

Le polygone des forces (fig. 226) nous donne les valeurs suivantes :

$$\begin{array}{ll} 1 = 4 = -1780 \text{ kil.} & 2 = 1580 \text{ kil.} \\ 3 = -1589 & 5 = 2260 \end{array}$$

3° Calcul de la ferme *st* :

La ferme *st* a la même forme que la ferme *ce*, mais supporte une charge un peu plus forte.

$$I_{III} = 3,75 \cdot 3,912 \cdot 122 = 1789^k$$

$$A_{III} = B_{III} = \frac{I_{III}}{2} = 894^{k,5}$$

Les efforts intérieurs sont donnés par le polygone des forces (fig. 226).

$$\begin{array}{ll} 1 = 4 = -1995 \text{ kil.} & 2 = 1770 \text{ kil.} \\ 3 = -1789 \text{ —} & 5 = 2520 \end{array}$$

4° Calcul de la ferme *tv* :

Cette ferme est de construction analogue à celle de la ferme *ef*, mais se trouve un peu plus chargée.

$$I_{IV} = II_{IV} = III_{IV} = 3,75 \cdot 3,68 \cdot 144 = 1987^k$$

$$A_{IV} = B_{IV} = \frac{3 \cdot 1987}{2} = 2980^k$$

Les efforts dans chaque élément de cette ferme pourront se déterminer ainsi que nous l'avons fait pour la ferme *ef* ou bien encore plus simplement en multipliant les résultats trouvés (fig.

224) par le rapport $\frac{I_{IV}}{I_I} = \frac{A_{IV}}{A_I}$. D'où le rapport ci-dessous :

$$\begin{array}{ll} 1 = 11 = -9400 \text{ kil.} & 2 = 10 = 8930 \text{ kil.} \\ 4 = 8 = -8780 \text{ —} & 6 = 5950 \text{ —} \\ 3 = 9 = -1850 \text{ —} & 5 = 7 = 2960 \text{ —} \end{array}$$

5° *Calcul de la poutre bp* (Pl. XV, fig. 231) :

$$I_v = II_v = III_v = IV_v = V_v = \frac{I_I}{2} + \frac{II_{II}}{2} = A_I + A_{II}$$

$$I_v = \dots \dots \dots V_v = 885 + 794,5 + 2655 + 794,5 = 5129^k$$

$$A_v = B_v = \frac{5 \cdot 5129}{2} = 12822^k,5$$

Les résultats suivants ont été relevés sur l'épure (Pl. XV, fig. 232).

2 = 20 = - 12200 kil.	6 = 18 = 12200 kil.
4 = 16 = - 19520 —	10 = 14 = 19520 —
8 = 12 = - 21940 --	1 = 21 = 18000 —
3 = 19 = - 12820 —	5 = 17 = 10800 —
7 = 15 = - 7690 —	9 = 13 = 3600 —
11 = — 5130 —	

6° *Calcul de la poutre bz* (fig. 229) :

$$I_{IV} = \frac{I_{III}}{2} + \frac{I_{IV}}{2} + A_{III} + A_{IV} = 894,5 + 993,5 + 894,5 + 2980$$

$$I_{VI} = 5762^k,5$$

$$A_{VI} = B_{VI} = \frac{I_{VI}}{2} = 2881^k,25$$

Le polygone des forces (fig. 230) fournit les résultats ci-dessous :

2 = 4 = - 3060 kil.	1 = 5 = 4220 kil.
3 = - 5762,5	

7° *Calcul de la ferme principale mn* (fig. 220) :

Les forces qui agissent sur cette ferme peuvent se grouper ainsi qu'il suit :

$$I = VII = \frac{I_{II}}{2} + \frac{I_{III}}{2} = 794,5 + 894,5 = 1689^k$$

$$II = VI = \frac{I}{2} + \frac{I_{IV}}{4} + \frac{I_I}{4} + A_v + A_{VI} =$$

$$II = VI = 844,5 + 496,75 + 442,5 = 12487,5 + 2881,25 = 17487^k,5$$

$$III = IV = V = \frac{I_I}{2} + \frac{I_{IV}}{2} = 885 + 993,5 = 1878^k,5$$

d'où :

$$A = B = \frac{I + II + III + IV + V + VI + VII}{2}$$

$$A = B = \frac{1}{2} (2 \cdot I + 2 \cdot II + 3 \cdot III)$$

$$A = B = 1689 + 17487,5 + \frac{3}{2} 1878,5 = 21994^k,25$$

Soit $A = B = 22^t$ (en chiffres ronds).

La partie de la toiture qui se reporte sur la moitié d'une ferme principale est indiquée sur le plan à droite par un trait pointillé. Nous pourrions donc encore, au moyen de cette surface, calculer la valeur de la réaction A , ce qui servira de contrôle au calcul donné ci-dessus. Nous aurons en effet :

$$A = B = 13,75 \cdot 7,375 \cdot 144^k + 13,75 \cdot 3,912 \cdot 122^k + 1.956 \left(\frac{3,333}{2} + \frac{3,750}{2} \right) 122^k$$

$$A = B = 14592 + 6558 + 844 = 21994^k$$

Soit $A = B = 22^t$

Il résulte du genre même de la construction de cette toiture que toutes les forces pourront être considérées comme agissant aux nœuds supérieurs. L'épure de la ferme principale mn (fig. 220) est tracée (Pl. XIX, fig. 221) ; elle fournit les résultats suivants :

1 = 25 = - 48800 kil.	2 = 24 = 43620 kil.
4 = 22 = - 46940 —	6 = 20 = 41920 —
8 = 18 = - 44720 —	10 = 16 = 44720 —
12 = 14 = - 45640 —	7 = 19 = 3960 —
3 = 23 = - 1900 —	11 = 15 = 1250 —
5 = 21 = - 875 —	
9 = 17 = - 2817 —	
13 = - 1878 —	

Si la poutre en treillis (Pl. XV, fig. 231) se trouvait remplacée par la poutre (Pl. XIV, fig. 227), l'hypothèse faite ci-dessus ne serait plus admissible, c'est-à-dire que la force II ne pourrait plus être considérée comme agissant en b (fig. 220). Dans ce cas, il faudrait admettre que la charge, qui se répartit sur cette poutre, vient se concentrer au point inférieur a de la ferme principale. Alors, les forces 2 et 3 seraient à composer au point a avec la force II et leur résultante à décomposer suivant les directions 5 et 6.

Ce tracé se trouve également fait sur l'épure (fig. 221) où la force II se trouve placée en ob . La résultante $II + 2 + 3$, décomposée suivant les deux directions 5 et 6, donne en $fb = 6$ et en $f3 = 5$ les valeurs cherchées, comme l'indique le tracé pointillé. La force 5 est alors dans ce cas augmentée de la quantité $ob = II$. Quant aux autres forces intérieures, elles conservent la même intensité. (Voir à ce sujet le tracé pointillé donnant les forces 7 et 8).

Si la force II se répartit par moitié au nœud supérieur b et au nœud inférieur a , il faut alors porter sur l'épure la force $\frac{II}{2}$ en od où la ligne g^3 représente la force 5. Dans ce cas, la force 5 est plus grande de la quantité $\frac{II}{2}$ que dans celui où la force II se concentre entièrement en b . Quant aux autres forces, elles conservent la même intensité. (Consulter à ce sujet le tracé en pointillés.)

Les barres de treillis figurées en traits pointillés (Pl. XIV, fig. 220, 225, 227 et 229, et Pl. XV, fig. 231) sont à considérer comme éléments complétant la construction.

La poutre (Pl. XIV, fig. 227), a 20^m de longueur et $3^m,50$ de hauteur. Les charges qu'elle supporte sont les suivantes :

$$I_v = II_v = III_v = IV_v = V_v = 5129 \text{ kil.}$$

Quant aux réactions des appuis, elles ont pour valeur :

$$A = B = 42822,3.$$

L'épure (fig. 228) donne la grandeur des forces développées dans chaque élément de cette poutre, savoir :

1 = 19 = — 17680 kil.	2 = 18 = 12100 kil.
4 = 16 = — 15780 —	6 = 14 = 19440 —
8 = 12 = — 27400 —	10 = 22000 —
5 = 15 = — 8580 —	3 = 17 = 8580 —
9 = 11 = — 2900 —	7 = 13 = 2900 —

**Poutre parabolique à membrure supérieure,
de section constante**

La poutre parabolique (Pl. XVI, fig. 244) a une portée $l = 36^m$ et

une flèche $m = \frac{l}{6} = 6^m$. Soit, de plus, $t = 8^m$ l'écartement des deux poutres consécutives. Pour calculer les charges qui se concentrent en chacun des nœuds d'une poutre, nous supposerons la vraie surface de la toiture remplacée par un plan passant par l'un des points d'appui et par le milieu de la membrure supérieure.

La largeur de ce plan est alors $x = \sqrt{\frac{l^2}{4} + m^2} = \sqrt{18^2 + 6^2} = 18^m,98$.

Il suit de l'hypothèse ci-dessus que le vent exercera une action plus forte sur ce plan que sur la vraie surface de la toiture ; par contre, la neige aura une influence moindre. Si la couverture est supposée faite en tôle ondulée galvanisée reposant sur des cornières, la charge uniformément répartie par mètre superficiel pourra s'évaluer ainsi qu'il suit :

Charge permanente.	22 kilos.
Surcharge (neige).	56 —
Pression du vent.	28 —
TOTAL.	<u>106</u> kilos.

Sur chaque ferme se répartit une surface de :

$$2x \cdot 8 = 2 \cdot 18,98 \cdot 8 = 303m^2,68.$$

La charge totale sera :

$$303,68 \cdot 106 = 32190^k,08$$

D'où la valeur des efforts concentrés sur chaque nœud :

$$I = II = III = \dots \dots \dots VIII = \frac{32190,08}{9} = 3576^k,7$$

où la force du vent entre pour 945 kilos.

Quant aux réactions des appuis, elles sont :

$$A = B = \frac{3576,7 \cdot 8}{2} = 14306^k,7.$$

Prenant alors $h = 2m = 12^m,20$, nous trouverons (fig. 246) la valeur de la force constante agissant dans la membrure supérieure :

$$14 = 2 Y_4 = 2 \cdot 11^t,92 = 23^t,84.$$

En appliquant à la recherche des efforts développés dans les autres éléments de cette poutre la méthode donnée page 151, nous pourrons dresser le tableau suivant :

1 = 4 = 6 = 10 = 14 = 18 = 22 = 26 = 29 =	—	23,840 kil.
5 = 25 =	—	2,700 kil.
9 = 21 =	—	400 —
13 = 17 =	—	1,400 —
2 = 28 =		19,000 —
8 = 24 =		22,400 —
12 = 20 =		22,800 —
16 =		23,840 —
3 = 27 =		4,320 —
7 = 23 =		520 —
11 = 19 =		1,640 —
15 =		0 —

**Poutre parabolique à membrure inférieure
de section constante**

La poutre représentée (Pl. XVI, fig. 248) a la même portée, la même flèche que la poutre parabolique précédente ; elle se trouve de plus soumise à l'action des mêmes charges.

Nous avons alors :

$$l = 36^{\text{m}},00 \quad ; \quad m = 6^{\text{m}},00$$

$$I = II = III = \dots = VIII = 3^{\text{t}},5767$$

$$A \quad B = 14^{\text{t}},3068$$

Sous l'influence de la surcharge s'étendant sur toute la longueur de la poutre, l'effort développé dans la membrure inférieure est constant.

Or, $h = 2m$. D'où il suit :

$$18 = 2 Y_4 = 2 \cdot 11^{\text{t}},92 = 23^{\text{t}},84.$$

Les barres de treillis ne supportent aucun effort sous la surcharge totale. Le polygone des forces $o'cb$, tracé en pointillés (fig. 245), donne la valeur des forces agissant dans les différents éléments, savoir :

$$2 = 6 = 10 = 14 = 18 = 22 = 26 = 30 = 32 = 23^{\text{t}},84$$

$$1 = 33 = -27^{\text{t}},84$$

$$4 = 28 = -26,18$$

$$8 = 24 = -24,96$$

$$12 = 20 = -24,14$$

$$16 = -23,84$$

Si nous supposons maintenant que la partie droite de la poutre se trouve seule soumise à l'action du vent, il faudra alors négliger pour la partie gauche l'effort du vent, et nous aurons :

$$I' = II' = III' = IV' = I - 0^t,945 = 3^t,576 - 0^t,945 = 2^t,631.$$

Dans ce cas, les réactions des appuis deviennent :

$$A = 11^t,58 ; B = 13^t,25.$$

Ces réactions étant inégales, il en sera de même des efforts développés dans les éléments composant la poutre.

Le tableau suivant résume ces efforts :

1 = - 22 ^t ,50	2 = 19 ^t ,24
4 = - 21,20	6 = 19,42
8 = - 20,30	10 = 19,80
12 = - 20,06	14 = 20,50
16 = - 20,52	18 = 21,18
20 = - 21,72	22 = 21,18
24 = - 22,76	25 = 21,50
28 = - 24,10	30 = 21,80
33 = - 25,70	32 = 21,96
5 = - 0,24	3 = 0,20
9 = - 0,64	7 = 0,48
13 = - 1,20	11 = 0,96
17 = - 1,28	15 = 1,02
21 = 0,54	19 = 0,00
25 = 0,48	23 = - 0,40
29 = 2,60	27 = - 0,36
	31 = - 0,20

Poutre en forme de croissant

La poutre en forme de croissant, représentée (Pl. XVI, fig. 249), a sa membrure supérieure identique à celle de la poutre (fig. 248). Elle a, de plus, même portée, même flèche et se trouve soumise à l'action des mêmes charges, d'où :

$$l = 36^m,00 \quad ; \quad m = 6^m,00$$

$$I = II = III = \dots = VIII = 3^t,576. \quad A = B = 14^t,306.$$

Quant à la membrure inférieure, elle a comme flèche $\frac{1}{4} m = 1^m,50$.

En opérant comme nous l'avons fait plus haut, nous aurons :

$$16 = 18 = \frac{Y_4 \cdot h}{\frac{3}{4}m}$$

Or, $h = 2m$, d'où il suit :

$$16 = 18 = \frac{8}{3} Y_4 = \frac{8}{3} 11^t, 92 = 31^t, 79.$$

Sous l'influence de la charge totale, les barres inclinées du treillis ne se trouvent soumises à aucun effort.

Quant aux forces agissant dans les différents éléments de la construction, nous les trouverons dans le polygone des forces (fig. 250), et nous pourrons, par suite, les résumer dans le tableau ci-dessous :

1 = 33 = - 37 ^t , 14	2 = 32 = 32 ^t , 08
4 = 28 = - 34, 90	6 = 30 = 31, 92
8 = 24 = - 33, 20	10 = 26 = 31, 80
12 = 20 = - 32, 14	14 = 22 = 31, 74
16 = - 31, 79	18 = 31, 79
	3 = 31 = 1, 19
	7 = 27 = 1, 19
	11 = 23 = 1, 19
	15 = 19 = 1, 19

Dans le cas où le vent n'agira que sur un seul côté, les forces intérieures seront les suivantes :

1 = - 30 ^t , 86	2 = 26 ^t , 78
4 = - 29, 20	6 = 26, 60
8 = - 28, 26	10 = 26, 68
12 = - 28, 40	14 = 27, 10
16 = - 20, 10	18 = 28, 12
20 = - 29, 40	22 = 29, 40
24 = - 30, 72	26 = 30, 00
28 = - 32, 80	30 = 30, 50
34 = - 33, 20	32 = 30, 68
5 = 0, 20	2 = 1, 20
9 = 0, 60	7 = 1, 00
13 = 1, 44	11 = 0, 60
17 = 1, 40	15 = 0, 20
21 = - 0, 36	19 = 0, 44
25 = - 0, 58	23 = 1, 42
29 = - 0, 44	27 = 1, 36
	31 = 1, 30

Ferme reposant en deux points intermédiaires.

La ferme représentée (Pl. XVI, fig. 251) a une longueur $l=30^m,00$. Quant à ses points d'appui, ils sont à $9^m,00$ de distance de l'axe de la ferme et se trouvent de plus de $0^m,50$ en contre-bas des extrémités de la poutre.

Nous avons admis une couverture en zinc sur toute la largeur du toit, à l'exception de la partie milieu, soit $\frac{1}{5}l$, qui se trouve vitrée.

Or, comme nous avons pris $\frac{h}{l} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$, nous pourrions estimer la charge, au mètre superficiel, ainsi qu'il suit :

Pour la partie couverte en zinc :

Charge permanente.	24 kilos.
Surcharge (neige).	56 —
Pression du vent.	28 —
TOTAL.	108 kilos.

Pour la partie vitrée :

Charge permanente.	60 kilos.
Surcharge (neige).	56 —
Pression du vent.	28 —
TOTAL.	144 kilos.

La demi-largeur du toit est :

$$x = \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + h^2} = \sqrt{15^2 + 5^2} = 15^m,77.$$

Si les fermes sont supposées à un écartement $t = 5^m,00$, il s'en suit que chacune d'elles supportera une surface de couverture :

$$2 \cdot 15,77 \cdot 5,00 = 157^m^2,7$$

dont la cinquième partie se trouve vitrée. La charge est donc la suivante.

Pour la partie couverte en zinc :

$$126,16 \cdot 108 = 13625^k,28 ;$$

Pour la partie vitrée :

$$31,54 \cdot 144 = 4541^k,76.$$

D'où :

$$A + B = 18167^k,04.$$

Les pannes se trouvant écartées de 3^m,00, les charges qui se concentrent en chaque nœud auront pour valeur :

$$I = XI = \frac{1}{16} \cdot 13625,28 = 851^k,58$$

$$II = III = IV = VIII = IX = X = 2 \cdot I = 1703^k,16$$

$$V = VII = I + \frac{1}{4} 4541^k,76 = 851,58 + 1135,44 = 1987^k,02$$

$$VI = \frac{1}{2} 4541,76 = 2270^k,88.$$

On voit, à la simple inspection du polygone des forces (fig. 252), que, sous l'action de la charge totale, les efforts intérieurs sont relativement faibles. Le tableau suivant résume les forces développées dans chaque élément :

2 = 36 = - 2100 Kil.	1 = 37 = 2200 Kil.
6 = 34 = - 4210 »	4 = 32 = 2200 »
9 = 29 = - 8410 »	8 = 28 = 4420 »
12 = 24 = - 1340 »	10 = 30 = 1280 »
16 = 20 = - 3910 »	14 = 26 = 3760 »
13 = 25 = - 4090 »	18 = 22 = 4130 »
17 = 21 = - 670 »	5 = 33 = 2610 »
3 = 35 = - 1700 »	11 = 27 = 2880 »
7 = 31 = - 2560 »	15 = 23 = 490 »
	19 = 1300 »

Pour rendre la construction plus claire, nous avons tracé (fig. 253) une partie de l'épure à une échelle trois fois plus grande.

**Ferme reposant en deux points avec marquise
d'un seul côté.**

Soit (Pl. XVI, fig. 254) une ferme reposant en deux points et dont l'appui gauche se trouve à une distance $l_1 = 6^m,00$ de l'extrémité de la ferme. Soit de plus $l_2 = 10^m,50$ l'écartement des deux

points d'appui, et $h = 4^m,00$; $h_1 = 1^m,40$; $h_2 = 0^m,60$, les différentes hauteurs de la ferme.

Supposons les fermes distantes d'une longueur $t = 4^m,00$. L'inclinaison de la toiture de la marquise est :

$$\frac{h_2}{l_1} = \frac{0,6}{6} = \frac{1}{10}$$

Le poids au mètre superficiel pour une couverture en zinc sera par suite :

Charge permanente.	24 kilos.
Surcharge (neige).	59 —
TOTAL.	<u>83 kilos.</u>

L'effet du vent pouvant être négligé sur cette partie de la toiture. Quant à l'autre partie, elle a comme largeur :

$$\sqrt{[h - h_1]^2 + l_2^2} = \sqrt{2,6^2 + 10,5^2} = 10^m,82$$

et comme inclinaison :

$$\frac{h - h_1}{l} = \frac{2,6}{10,5}$$

soit en chiffres ronds $\frac{1}{4}$.

La surface rr étant vitrée, nous pourrons établir les poids au mètre superficiel ainsi qu'il suit :

Pour la partie couverte en zinc :

Charge permanente	24 kilos.
Surcharge (neige)	53 —
Pression du vent	45 —
TOTAL	<u>122 kilos.</u>

Pour la partie vitrée :

Charge permanente	60 kilos.
Surcharge (neige)	53 —
Pression du vent	45 —
TOTAL	<u>158 kilos.</u>

Ces charges une fois déterminées, il nous sera facile de calculer les forces qui se concentrent en chaque nœud, savoir :

$$I = 1^m,00 \cdot 4^m,00 \cdot 83^k = 332^k,00$$

$$II = III = 2 \cdot I = 664^k,00$$

$$V = 2^m,319 \cdot 4^m,00 \cdot 122^k = 1131^k,67$$

$$IV = \frac{II}{2} + \frac{V}{3} = 709,22$$

$$VI = VII = 3^m,092 \cdot 4^m,00 \cdot 158 = 1954,24.$$

La surcharge totale est donc égale à :

$$A + B = 7409^m,37.$$

Les réactions étant d'intensité différentes, nous en avons déterminé la valeur au moyen du polygone des forces oab (fig. 256) et du polygone funiculaire $\alpha\beta\gamma\delta\eta\nu\mu\omega\pi\rho$ (fig. 255) et nous avons trouvé :

$$A = ac = 5583^k$$

$$B = cb = 1825.$$

Si pour déterminer la valeur de A, nous établissons l'équation des moments en les rapportant au point b , nous aurons :

$$A \cdot l_2 - [332 \cdot 16,5 + 664(14,5 + 12,5) + 709,22 \cdot 10,5 + 1131,67 \cdot 9 + 1954,24(6,0 + 3,0)] = 0$$

$$A = \frac{5478 + 17928 + 7446,81 + 10185,03 + 17588,16}{10,5} = \frac{58626}{10,5} = 5583^k,4.$$

En appliquant au tracé de l'épure la méthode indiquée plus haut, nous obtiendrons les résultats suivants :

2 = - 1550 Kil.	1 = 1500 Kil.
6 = - 3500 »	4 = 2460 »
10 = - 4570 »	8 = 3800 »
13 = - 5660 »	12 = 4460 »
16 = - 0860 »	15 = 2420 »
20 = - 1830 »	18 = 1980 »
24 = - 0750 »	22 = 1610 »
14 = - 0700 »	25 = 2160 »
17 = - 2180 »	5 = 0520 »
19 = - 0390 »	9 = 0810 »
23 = - 2200 »	11 = 0160 »
3 = - 1210 »	21 = 0390 »
7 = - 1390 »	

Pour plus de clarté, nous avons tracé (fig. 257) une partie de l'épure à une échelle plus grande.

Ferme pour marquise à fiches et contrefiches.

Soit (Pl. XVII, fig. 262) une ferme d'une portée $l = 6^m,00$ et de hauteur maxima $h = 1^m,50$, d'où $\frac{h}{l} = \frac{1}{4}$.

Si les fermes sont à un écartement $t = 3^m,00$, chacune d'elles portera une surface :

$$3,0 \cdot \sqrt{l^2 + h^2} = 3,00 \sqrt{6^2 + 1,5^2} = 3,00 \cdot 6,18 = 18^m^2,54.$$

Supposons la couverture en zinc, le poids par mètre superficiel sera alors :

Charge permanente	24 kilos.
Surcharge (neige)	53 —
Pression du vent	45 —
	<hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/>
TOTAL	122 kilos.

La charge, qu'une ferme aura à supporter, sera :

$$122 \cdot 18,54 = 2261^k,88.$$

Quant aux charges concentrées en chaque nœud, elles seront :

$$I = \frac{2261,88}{8} = 282^k,8$$

$$II = III = IV = \frac{2261,88}{4} = 565^k,47.$$

Pour déterminer les efforts développés dans chaque élément, nous commencerons par décomposer la force I suivant les directions 1 et 2 et ainsi de suite (fig. 263). Le tableau suivant donne la valeur des efforts relevés sur l'épure:

2 = — 1120 Kil.	1 = 1160 Kil.
6 = — 2250 »	4 = 1930 »
10 = — 3370 »	8 = 3020 »
14 = — 4470 »	12 = 4130 »
3 = — 0510 »	5 = 0530 »
7 = — 0620 »	9 = 0810 »
11 = — 1160 »	13 = 1060 »

Ferme pour marquise à montants et contrefiches.

La ferme représentée (Pl. XVII, fig. 264) diffère de la ferme précédente dans la disposition des barres de treillis; elle a la même portée et se trouve de plus soumise à l'action des mêmes charges.

Nous avons alors :

$$l = 6^{\text{m}},00 ; h = 1^{\text{m}},50$$

$$I = 282^{\text{k}},8 ; II = III = IV = 565^{\text{k}},47.$$

Les valeurs ci-dessous données, ont été relevées directement sur l'épure (fig. 265) :

2 = - 1120 Kil.	1 = 1160 Kil.
6 = - 2230 »	4 = 1160 »
10 = - 3370 »	8 = 2310 »
14 = - 4470 »	12 = 3470 »
3 = - 570 »	5 = 1270 »
7 = - 850 »	9 = 1430 »
11 = - 1130 »	13 = 1590 »

Consoles.

Soit (Pl. XVII, fig. 226) une console de longueur $l = 4^{\text{m}}$ et de hauteur $h = 1^{\text{m}}$; sur cette console agissant les forces :

$$I = 4000^{\text{kos}}$$

$$II = III = IV = 1000^{\text{kos}}.$$

Le polygone des forces (fig. 267) donne les efforts développés dans chaque élément, savoir :

2 = - 6030 Kil.	1 = 4500 Kil.
6 = - 7880 »	4 = 4500 »
10 = - 12500 »	8 = 7500 »
14 = - 18250 »	12 = 12500 »
3 = - 1000 »	5 = 4000 »
7 = - 3680 »	9 = 7800 »
11 = - 7000 »	13 = 9130 »

Ferme à entrain surchargé.

Soit (Pl. XV, fig. 242) une ferme dont l'entrait doit supporter le poids du plafond. Il s'ensuit que dans cette construction les nœuds inférieurs seront aussi chargés.

Soit $l = 20^m$ la portée de la ferme et $h = 6^m$, sa hauteur ; d'où le rapport $\frac{h}{l} = \frac{6}{20}$. Soit, de plus, $t = 4^m$, l'écartement des fermes. Chacune d'elle portera alors une surface de couverture égale à :

$$4 \cdot 2 \cdot \sqrt{20^2 + 6^2} = 4 \cdot 2 \cdot 11,66 = 93^m^2,28.$$

Supposons la couverture en ardoises reposant sur lattis métallique ; la charge par mètre carré de couverture sera :

Charge permanente	50 kilos.
Surcharge (neige)	60 —
Pression du vent	50 —
	160
TOTAL	160 kilos.

La charge qui se concentre sur une ferme sera par suite :

$$93,28 \cdot 160 = 14924^{\text{kos}},8$$

d'où :

$$I = II = III = \frac{14924,8}{4} = 3731^{\text{k}},2.$$

Si nous estimons à 100 kilos par mètre carré, le poids du plafond, l'entrait portera donc :

$$20 \cdot 4 \cdot 100 = 8000^{\text{kos}}$$

d'où :

$$I' = II' = III' = \dots = VII' = \frac{8000}{8} = 1000^{\text{kos}}.$$

Les réactions des appuis seront :

$$A = B = 9596^{\text{kos}},8.$$

Le polygone des forces (fig. 243) donne la valeur des efforts développés dans chaque élément de la construction :

2 = 28 = - 17680 Kil.	1 = 6 = 10 = 13 = 15160 Kil.
4 = 26 = - 16710 »	17 = 20 = 24 = 29 = 15160 »
14 = 16 = - 11120 »	7 = 23 = 23 = 2000 »
8 = 22 = - 5560 »	3 = 11 = 19 = 27 = 1000 »
12 = 18 = - 6530 »	15 = 7600
5 = 9 = 21 = 25 = - 970.	

**Ferme Polonceau à une seule bielle
et à arbalétriers composés.**

La forme représentée (Pl. XVII, fig. 258), a une portée $l = 30^m,00$ et une hauteur $h = 10^m$, d'où $\frac{h}{l} = \frac{1}{3}$. Les fermes étant placées à un écartement $t = 4^m$, chacune d'elle portera une surface :

$$4 \cdot 2 \cdot \sqrt{10^2 + 15^2} = 4 \cdot 2 \cdot 17,91 = 143^m,28.$$

Supposons la couverture en tôle ondulée ; la charge par mètre carré pourra s'estimer ainsi qu'il suit :

Charge permanente . . .	25 kilos.
Surcharge (neige) . . .	50 —
Pression du vent	66 —
TOTAL	141 kilos.

La charge qui se concentre sur chaque ferme sera donc égale à :

$$143,28 \cdot 141 = 20202^{\text{kos}},48$$

d'où :

$$I = II = III = \frac{20202,48}{4} = 5050^{\text{kos}},62$$

$$A = B = \frac{I + II + III}{2} = 7575^{\text{kos}},93.$$

Connaissant la valeur des réactions des appuis, nous déterminerons (fig. 259) les efforts agissant dans chaque élément du système Polonceau ; ces efforts sont indiqués dans le polygone des forces au moyen de traits renforcés.

$$\begin{array}{ll}
 1 = 10 = 17720 \text{ Kil.} & 2 = 11 = 14920 \text{ Kil.} \\
 4 = 8 = 14920 \text{ »} & 6 = 8700 \text{ »} \\
 3 = 9 = 4200 \text{ »} & 5 = 9 = 6740 \text{ »}
 \end{array}$$

Ces valeurs donnent immédiatement les forces développées dans l'entrait et le treillis. Il n'en est pas de même pour l'arbalétrier qui se trouve ici composé de poutres de second ordre.

Les charges agissant sur chacune de ces poutres sont les suivantes :

$$I' = II' = III' = IV' = V' = \frac{20202,48}{24} = 841^k,77.$$

Les réactions correspondantes seront :

$$a = b = \frac{5.841,77}{2} = 2104^{\text{kos}},425.$$

Ainsi qu'on peut le remarquer, ces réactions a et b sont des parties aliquotes des forces I, II, III. Elles se trouvent portées sur l'épure (fig. 259).

Au moyen de ces valeurs, nous saurons déterminer les forces intérieures agissant dans chaque élément. Ce tracé est indiqué (fig. 259) en traits fins. Les polygones des forces (fig. 260 et 261) donnent ces mêmes valeurs, mais une échelle double.

Les résultats sont consignés au tableau suivant, qui se rapporte à la poutre à membrures parallèles :

$$\begin{array}{ll}
 1' = -3720 \text{ Kil.} & 2' = 21' = 3080 \text{ Kil.} \\
 4' = -4800 \text{ »} & 6' = 18' = 2550 \text{ »} \\
 8' = -4860 \text{ »} & 10' = 14' = 4100 \text{ »} \\
 12' = -4390 \text{ »} & 5' = 17' = 1870 \text{ »} \\
 16' = -3400 \text{ »} & 9' = 13' = 630 \text{ »} \\
 20' = -1380 \text{ »} & \\
 3' = -1750 = 19' & \\
 7' = -1050 = 15' & \\
 11' = -700. &
 \end{array}$$

Les valeurs trouvées pour la membrure inférieure et pour les barres de treillis sont de suite valables pour la combinaison des deux poutres. Quant aux valeurs trouvées pour la membrure

supérieure, elles sont à ajouter à celles trouvées précédemment (ferme Polonceau).

Le tableau suivant résume les efforts développés dans chaque élément de la membrure supérieure, dans le cas de poutres à membrures parallèles :

$$\begin{aligned}
 1 + 1' &= -17720 - 3720 = -21440 \text{ Kil.} \\
 1 + 4' &= -17720 - 4800 = -22520 \text{ »} \\
 1 + 8' &= -17720 - 4860 = -22580 \text{ »} \\
 1 + 12' &= -17720 - 4390 = -22110 \text{ »} \\
 1 + 16' &= -17720 - 3400 = -21120 \text{ »} \\
 1 + 20' &= -17720 - 1380 = -19100 \text{ »} \\
 4 + 1' &= -14920 - 3720 = -18640 \text{ »} \\
 4 + 4' &= -14920 - 4800 = -19720 \text{ »} \\
 4 + 8' &= -14920 - 4860 = -19780 \text{ »} \\
 4 + 12' &= -14920 - 4390 = -17310 \text{ »} \\
 4 + 16' &= -14920 - 3400 = -18320 \text{ »} \\
 4 + 20' &= -14926 - 1380 = -1630 \text{ »}
 \end{aligned}$$

On pourrait dresser d'une manière analogue le tableau relatif aux poutres paraboliques.

Au polygone des forces se trouve porté, en $st = 20202^k, 48$ le poids total de la toiture, et en $gr = A + B = \frac{23}{24} 20202^k, 48$ la somme des deux réactions qui sollicitent la ferme.

Poutre à treillis symétrique double.

La poutre en treillis (Pl. XV, fig. 233) a une portée $l = 20^m$ et une hauteur $m = \frac{1}{10} l = 2^m$. Les forces qui agissent sur cette poutre sont :

$$I = II = III = IV = V = VI = I' = II' = III' = IV' = 2^t.$$

D'où les valeurs des réactions :

$$A = B = 9^t.$$

Le polygone des forces correspondant a été construit avec une tension horizontale $h = 2m = 4^m$.

Les efforts développés dans les membrures par les forces I, II,

III, IV, V, se trouvent en doublant les ordonnées (fig. 235) du polygone funiculaire. (Les ordonnées à considérer dans ce cas sont désignées sur l'épure au moyen d'un cercle).

Ainsi, la force 4 aura pour valeur :

$$4 = \frac{ii \cdot h}{m} = \frac{ii \cdot 2m}{m} = 2 \cdot ii$$

$$4 = 2 \cdot 4^t = 8^t$$

On trouverait de même :

$$\begin{array}{ll} 2 = 18 = 2^t \cdot 2 = 5^t & 4 = 16 = -4 \cdot 2 = 8^t \\ 6 = 14 = 5,5 \cdot 2 = 11 & 8 = 12 = -6 \cdot 2 = 12 \\ 10 = 6,5 \cdot 2 = 13. & \end{array}$$

Quant aux efforts développés dans les membrures par les forces I', II', III', IV', nous les obtiendrons en considérant les ordonnées désignées au moyen d'un cercle plus petit. Le tableau suivant les résume :

$$\begin{array}{ll} 2' = 18' = -2^t \cdot 2 = -4^t & 4' = 16' = 4^t \cdot 2 = 8^t \\ 6' = 14' = -5 \cdot 2 = -10 & 8' = 12' = 6 \cdot 2 = 12 \\ 10' = -6 \cdot 2 = -12. & \end{array}$$

En additionnant les valeurs correspondantes trouvées dans chaque cas, nous aurons les forces agissant dans les membrures de la poutre à treillis double, savoir.

Pour la membrure supérieure :

$$\begin{array}{l} 2' = 18' = -4^t, 0 \\ 2' + 4 = 16 + 18' = -4^t - 8^t = -12^t \\ 4 + 6' = 14' + 16 = -8 - 10 = -18 \\ 6' + 8 = 12 + 14' = -10 - 12 = -22 \\ 8 + 10' = 10' + 12 = -12 - 12 = -24. \end{array}$$

Pour la membrure inférieure :

$$\begin{array}{l} 2 = 18 = 5^t \\ 2 + 4' = 16' + 18 = 5 + 8 = 13^t \\ 4' + 6 = 14 + 16' = 8 + 11 = 19 \\ 6 + 8' = 12' + 14 = 11 + 12 = 23 \\ 8' + 10 = 10 + 12' = 12 + 13 = 25. \end{array}$$

Quant aux efforts développés dans les barres de treillis, ils sont donnés par l'épure (Pl. XV. fig. 236). Ces efforts s'appliquent aussi

bien à chaque poutre considérée isolément qu'à la combinaison des deux systèmes, et les valeurs se trouvent consignées au tableau ci-dessous :

$1 = 19 = -7,06$	$1' = 19' = 5,65$
$3 = 17 = -5,65$	$3 = 17 = 4,25$
$5 = 15 = -4,25$	$5' = 15' = 2,83$
$7 = 13 = -2,82$	$7 = 13 = 1,40$
$9 = 11 = -1,40$	$9' = 11' = 0,00.$

Poutre à treillis symétrique quadruple.

La poutre en treillis (Pl. XV, fig. 237) a une portée $l = 20^m$ et une hauteur $m = \frac{1}{10} l = 2^m$. Les forces agissant en chaque nœud sont :

$$1 = 2 = 3 = 4 = 5 = \dots \dots \dots 18 = 19 = 1^t.$$

D'où la valeur des réactions :

$$A = B = 9^t,5.$$

Le polygone des forces correspondant ayant été construit avec une tension horizontale $h = 3m = 6^m$, les ordonnées du polygone funiculaire multipliées par 3 donneront la valeur des efforts développés dans les membrures. Ainsi, nous aurons pour la section xx :

$$1 = 6 = 3 Y_{\beta} = 3 \cdot 6^t,62 = 19^t,86.$$

Nous obtiendrons de même les efforts développés dans chaque élément; la membrure supérieure sera comprimée et la membrure supérieure tendue. Le tableau suivant résume les efforts successivement pour chaque panneau, en partant de l'appui situé à droite.

Ordonnées.	Efforts dans les membrures.
$0,79 \cdot 3 = \dots \dots \dots$	$2^t,37$
$2,29 \cdot 3 = \dots \dots \dots$	$6,87$
$3,62 \cdot 3 = \dots \dots \dots$	$10,86$
$4,79 \cdot 3 = \dots \dots \dots$	$14,37$
$5,79 \cdot 3 = \dots \dots \dots$	$17,37$
$6,62 \cdot 3 = \dots \dots \dots$	$19,86$
$7,29 \cdot 3 = \dots \dots \dots$	$21,87$
$7,79 \cdot 3 = \dots \dots \dots$	$23,37$
$8,12 \cdot 3 = \dots \dots \dots$	$24,36$
$8,29 \cdot 3 = \dots \dots \dots$	$24,87.$

Nous saurons également trouver la valeur des forces agissant dans les barres de treillis.

Nous aurons,

Pour la section xx :

$$3 = 4 = \frac{cf}{4} = \frac{dg}{4} = 1^t,59.$$

Pour la section x_1x_1 :

$$9 = 10 = \frac{bp}{4} = \frac{al}{4} = 2^t,66$$

$$8 = 11 = \frac{bq}{4} = \frac{ao}{4} = 3^t,36.$$

Le tableau suivant résume les efforts développés dans les barres de treillis successivement pour chaque panneau, en partant de l'appui situé à gauche.

BARRES COMPRIMÉES :

$\frac{1}{4} 10^t,62 = -2^t,66$	$\frac{1}{4} 7^t,78 = -1^t,95$
$\frac{1}{4} 13,43 = -3,36$	$\frac{1}{4} 6,35 = -1,59$
$\frac{1}{4} 12,20 = -3,05$	$\frac{1}{4} 4,95 = -1,24$
$\frac{1}{4} 10,60 = -2,65$	$\frac{1}{4} 3,52 = -0,88$
$\frac{1}{4} 9,19 = -2,30$	$\frac{1}{4} 2,11 = -0,53$
	$\frac{1}{4} 0,7 = -0,17.$

BARRES TENDUES :

$\frac{1}{4} 10^t,62 = 2^t,66$	$\frac{1}{4} 7^t,78 = 1^t,95$
$\frac{1}{4} 13,43 = 3,36$	$\frac{1}{4} 6,35 = 1,59$
$\frac{1}{4} 12,20 = 3,05$	$\frac{1}{4} 4,95 = 1,24$
$\frac{1}{4} 10,60 = 2,65$	$\frac{1}{4} 3,52 = 0,88$
$\frac{1}{4} 9,19 = 2,30$	$\frac{1}{4} 2,11 = 0,53$
	$\frac{1}{4} 0,7 = 0,17.$

Toutes les barres montant du côté du moment maximum fléchissant sont comprimées et les autres tendues.

Dans la disposition figurée sur la droite de la poutre, les deux premières barres de treillis comprimées et tendues travaillent également sous un effort d'intensité : $\frac{1}{4} 13^t,43 = 3^t,36$.

Il n'en est pas de même pour la disposition figurée à gauche. Le montant sur la culée *vp* supporte un effort de compression $\frac{A}{2} = 4^t,75$ provenant de la transmission en *v* des forces développées dans les barres de treillis.

Dans la disposition figurée à droite, la réaction au nœud supérieur est de $\frac{1}{4} A = 2^t,375$ et le montant travaille sous cet effort à la compression. Mais au point milieu agit la moitié de la réaction $\frac{1}{2} A = 4^t,75$; la partie inférieure du montant se trouvera donc, par suite, soumise à un effort de compression $\frac{3}{4} A = 7^t,125$, c'est-à-dire que, dans ce cas, un quart de la réaction totale se transmet directement à l'appui.

DÉTERMINATION GRAPHIQUE

DES MOMENTS D'INERTIE DES SURFACES PLANES.

Dans la plupart des calculs de résistance qui se présentent dans la pratique, qu'il s'agisse par exemple des dimensions à donner à une poutre, à une colonne, etc. il faut connaître le moment d'inertie de leurs sections, comme on le démontre dans tout cours de résistance des matériaux. A côté d'une exactitude suffisante, la détermination graphique des mo-

ments d'inertie des surfaces planes offre en outre de très grands avantages ; nous croyons donc utile de développer ici cette construction graphique.

Le moment d'inertie, entrant dans toutes les formules relatives à la résistance des matériaux, doit toujours être rapporté à un axe passant par le centre de gravité de la section.

Aussi nous faudra-t-il, avant de passer à la recherche du moment d'inertie, nous occuper tout d'abord de la construction graphique du centre de gravité des surfaces planes.

Construction graphique du centre de gravité des surfaces planes.

Pour déterminer la position du centre de gravité de la surface irrégulière représentée (Pl. XVIII, fig. 273), nous la diviserons au moyen de lignes parallèles en surfaces élémentaires que nous saurons mesurer. Nous considérerons ensuite chacune des longueurs proportionnelles 1,2,3...9, comme des forces parallèles agissant au centre de gravité de chaque élément, et nous pourrions construire le polygone des forces oab (fig. 274) et le polygone funiculaire correspondant $\alpha\beta\gamma\delta\eta\phi\lambda\mu\nu\omega\pi$. Les côtés extrêmes du polygone funiculaire prolongés se coupent en un point ρ , qui est précisément un point de la direction ρi de la résultante R des forces considérées. Quant à cette droite ρi , elle doit passer par le centre de gravité cherché.

Si maintenant nous divisons la surface donnée en nouveaux éléments au moyen de lignes parallèles, formant avec les premières lignes de division, un angle quelconque ; par exemple, au moyen de lignes horizontales, nous pourrions, en appliquant le procédé donné ci-dessus, construire le polygone des forces et le polygone funiculaire (fig. 275, 273), correspondant aux longueurs proportionnelles 1',2',3'...7', considérées comme forces. La direction τr de la résultante R des forces 1'2', etc..., doit également passer par le centre de gravité cherché.

Le point d'intersection C des directions de deux résultantes

égales R et R sera donc le centre de gravité de la surface donnée.

A la simple inspection de la surface irrégulière (Pl. XVIII, fig. 273), on voit qu'elle a été décomposée en éléments ayant la forme de triangles, de trapèzes et de segments paraboliques; il est donc avant tout nécessaire de connaître la position des centres de gravité de ces surfaces élémentaires; c'est pourquoi nous donnons ci-dessous la recherche du centre de gravité des plus importantes d'entre elles.

1. — Le centre de gravité C d'un triangle (Pl. XVIII, fig. 268) est le point de rencontre des trois médianes de ce triangle. Il se trouve donc par conséquent au tiers de cette médiane à partir du côté considéré comme base. Des propriétés mêmes du triangle, nous pourrions conclure que son centre de gravité se trouve aussi sur une parallèle à un côté quelconque pris comme base, menée au tiers de la hauteur correspondante.

2. — Pour trouver le centre de gravité d'un trapèze (Pl. XVIII, fig. 269), nous mènerons avant tout la droite joignant les points milieux r et s des côtés parallèles. Nous porterons, sur le prolongement du plus petit parallèle ab , en bn la longueur du plus grand côté cd ; nous porterons ensuite dans le prolongement de cd , en dt le côté ab . En joignant les points ainsi déterminés n et t , nous trouverons au point d'intersection des droites nt et sr le centre de gravité cherché C .

3. — Dans un demi cercle (Pl. XVIII, fig. 270), le centre de gravité C se trouve à une distance $oC = 0,424r$ du centre o sur le rayon partageant la surface en deux parties égales.

4. — Dans un secteur circulaire (Pl. XVIII, fig. 271), le centre de gravité C se trouve à une distance $oC = \frac{1}{3}r$ sur le rayon bissecteur de l'angle au centre.

5. — Le centre de gravité d'un segment parabolique tsr (Pl. XVIII, fig. 272) est situé sur l'axe de la parabole à une distance $oC = \frac{2}{5}x$ de la corde sous-tendue. Le centre de gravité de l'élément tor ou osr a pour coordonnées :

$$oC = \frac{2}{5} x$$

$$Cc = \frac{3}{8} y.$$

Le centre de gravité C' de la surface $trsu$ limitée par la parabole et les deux tangentes tu et su est donné par l'ordonnée

$$rC' = \frac{1}{5} x.$$

Enfin le centre de gravité des deux surfaces égales rtu et rsu a pour coordonnées :

$$C'r = \frac{1}{5} x$$

$$c' C' = \frac{1}{4} y.$$

Toute surface irrégulière, surtout si elle ne se trouve limitée que par des lignes droites, pourra se décomposer simplement en triangles, dont nous saurons trouver les centres de gravité. Les longueurs proportionnelles représentant chaque élément seront ensuite à considérer comme forces parallèles agissant aux différents centres de gravité. Appliquant alors le même procédé que ci-dessus, nous trouverons le centre de gravité cherché au point de rencontre des directions de deux résultantes égales R et R' . Dans ce cas les surfaces élémentaires seront à mesurer une seule fois ; par contre la position de chaque centre de gravité devra être parfaitement déterminée, chose facile pour un triangle.

Dans la construction décrite la première, nous avons été conduits à mesurer deux fois les surfaces élémentaires.

Dans ce cas, la position exacte des centres de gravité n'est pas nécessaire, mais celle des axes passant par chacun d'eux. Si donc la largeur des lamelles élémentaires se trouve être suffisamment petite, ces axes coïncideront à très peu près avec les médianes des éléments, et nous pourrons, sans erreur sensible, employer ces dernières à la recherche du centre de gravité de la surface donnée.

Une surface a-t-elle un axe de symétrie, son centre de gravité

se trouve naturellement situé sur cet axe; dans ce cas, une seule décomposition en surfaces élémentaires est nécessaire.

La surface donnée a-t-elle deux axes de symétrie, son centre de gravité est précisément le point d'intersection de ces deux axes.

Dans toutes les figures régulières, le centre de figure et le centre de gravité se confondent en un seul et même point.

Dans l'exemple traité (Pl. XVIII, fig. 273), nous avons pris $a = 40^{\text{mm}}$, et nous avons trouvé comme résultat $f = 27,2^{\text{mm}} = R = R$.

Sa surface est alors :

$$F = f \cdot a = 27,2 \cdot 40 = 1088^{\text{mm}^2}.$$

Cette surface est-elle la section d'un prisme de hauteur $h = 1000^{\text{mm}}$, le poids de ce prisme sera, en supposant le poids spécifique de sa matière, égal à 7,89 (poids spécifique du fer).

$$(F \cdot h)^{\text{mm}^3} \cdot \gamma = 1088 \cdot 1000 \cdot 7,89 = 8584320 \text{ milligrammes} \\ = 8^{\text{k}},584.$$

Il résulte de ce qui se présente que, si les dimensions du corps sont exprimées en centimètres, décimètres, mètres, le résultat le sera en grammes, kilogrammes, tonnes.

Détermination graphique du moment d'inertie d'une surface plane.

Nous voulons nous occuper principalement ici du moment d'inertie d'une surface plane, pris par rapport à un axe passant par le centre de gravité de la section considérée.

Soit par exemple (Pl. XVIII, fig. 276) la section d'un fer à T; nous voulons en déterminer le moment d'inertie par rapport à un axe passant par le centre de gravité et parallèle au côté rs . Pour cela, décomposons la section donnée en surfaces élémentaires, que nous saurons facilement mesurer. Portons en mn (fig. 277) les longueurs proportionnelles 1, 2, 3, 4, 5, représentant ces éléments. Considérant alors ces surfaces comme des forces parallèles-

lès, ayant chacune leur point d'application au centre de gravité de l'élément, nous pourrons, au moyen de la distance polaire b , prise arbitrairement, construire le polygone funiculaire $\alpha\beta\gamma\eta\theta\nu\pi$ (fig. 278) correspondant au polygone des forces omn . En prolongeant les côtés extrêmes $\alpha\beta$ et $\nu\pi$ jusqu'à leur point d'intersection ρ , nous trouverons en ρC un axe passant par le centre de gravité. Mais comme la section donnée a un axe de symétrie pq , il s'en suit que le point C sera le centre de gravité cherché. Le polygone funiculaire, ainsi construit, enveloppe la courbe funiculaire correspondant à la section considérée; les points α, e, i, r, s, π sont autant de points de tangence. La courbe joignant ces points est formée par deux paraboles tangentes au point s , correspondant avec deux charges uniformément réparties.

Nous allons démontrer que la surface $\alpha e i r s \pi \rho$, comprise entre ces deux paraboles et les tangentes $\alpha\rho$ et $\pi\rho$ (surface ombrée sur l'épure) est proportionnelle au moment d'inertie de la section considérée.

Pour cela, prenons un élément très petit ΔF ; soit x sa distance à l'axe passant par le centre de gravité. Le moment d'inertie de cet élément a pour valeur :

$$\Delta J = \Delta F \cdot x^2.$$

La sommation des moments d'inertie de tous les éléments très petits, entrant dans la section donnée, représentera le moment d'inertie cherché, savoir :

$$J = \Sigma \Delta J = \Sigma (\Delta F \cdot x^2).$$

Mais comme nous avons pris a comme base de réduction de la surface F , nous aurons :

$$\Delta F = a \cdot \Delta f$$

où Δf est la longueur proportionnelle de l'élément ΔF .

Or, le moment de ΔF , pris par rapport à l'axe considéré, est donné par l'expression $\Delta f x$. Ce moment peut se construire facilement. Pour cela, décomposons dans le polygone des forces la force 2 en Δf et $2 - \Delta f$, et menons dans le polygone funiculaire le nouveau côté $\tau\tau'$. Les deux côtés du polygone funiculaire $\tau\tau'$, et

$\tau'n$, correspondant à l'élément ΔF , prolongés, interceptent sur l'axe considéré la longueur $\Delta y = oo$ (c'est-à-dire l'ordonnée proportionnelle au moment cherché). Nous pourrions donc écrire la relation suivante :

$$\Delta f . x = \Delta y . b.$$

En multipliant les deux termes de cette égalité par la quantité ax , nous aurons :

$$\Delta f . a . x^2 = \Delta y . a . b . x.$$

Mais $\Delta fa = \Delta F$ et Δyx est le double de la surface du triangle $\tau'oo$. Le moment d'inertie de l'élément ΔF aura donc pour expression :

$$\Delta F . x^2 = a . b . 2 (\text{surface } \tau'oo) = \Delta J.$$

Il en est de même pour tout autre élément ΔF .

La sommation des moments d'inertie de tous les éléments ΔF donnera la valeur du moment d'inertie de la section considérée, et nous pourrions, en faisant de suite sortir du signe Σ les quantités constantes poser l'équation suivante :

$$J = 2 . a . b \Sigma (\text{surface } \tau'oo).$$

Mais Σ (surf. $\tau'oo$) n'est autre que la surface $\alpha eirs\pi\rho$; d'où la valeur du moment d'inertie :

$$J = 2 . a . b (\text{surface } \alpha eirs\pi\rho).$$

Si donc nous mesurons la surface $\alpha eirs\pi\rho$ en la rapportant à la base c , et si nous désignons par i sa longueur proportionnelle, nous aurons :

$$J = 2 . a . b . c . i$$

ou bien :

$$i = \frac{J}{2 . a . b . c}.$$

A cet effet, nous avons transformé (Pl. XVIII, fig. 278) la surface $\alpha eirs\pi\rho$ en un triangle équivalent ρAB ; nous avons porté en Bk le double de la base c , et nous avons trouvé en rr la valeur de i , c'est-à-dire la longueur proportionnelle du moment d'inertie cherché.

Le fer à T, dont le profil est tracé en grandeur naturelle (Pl.

XVIII, fig. 270) est un échantillon des forges de Pompey et d'Apremont (Meurthe-et-Moselle), usines Dupont et Fould.

Nous avons pris comme base :

$$a = 20^{\text{mm}}$$

$$b = 20^{\text{mm}}$$

$$c = 25^{\text{mm}}.$$

Nous avons trouvé comme résultat de notre construction :

$$i = 15,50^{\text{mm}}.$$

D'où, la valeur de J :

$$J = 2 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot i = 2 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 25 \cdot 15,5 = 310000^{\text{mm}^4}$$

ou bien encore exprimé en cm^4 :

$$J = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2,5 \cdot 1,55 = 31,^{\text{cm}^4}.$$

La section de ce fer à T est (fig. 277) :

$$F = f \cdot a = m n \cdot a = 45,^{\text{mm}}8 \cdot 20^{\text{mm}} = 916^{\text{mm}^2}.$$

D'où son poids au mètre courant :

$$p = 45,8 \cdot 20 \cdot 1000 \cdot 7,79 = 7^{\text{k}},13.$$

Le moment de résistance de ce même fer s'obtiendra en divisant le moment d'inertie J par les distances d et d_1 des fibres les plus éloignées au centre de gravité C ; d'où :

$$\frac{J}{d} = \frac{310,000^{\text{mm}^4}}{40,5^{\text{mm}}} = 7654^{\text{mm}^3}$$

$$\frac{J}{d_1} = \frac{310,000^{\text{mm}^4}}{19,5^{\text{mm}}} = 15897^{\text{mm}^3}.$$

Moment d'inertie d'un fer I.

Soit, par exemple à déterminer le moment d'inertie du fer I (Pl. XVIII, fig. 279) par rapport à l'axe XX, mené par le centre de gravité parallèlement à l'arête supérieure de l'aile. La section de ce fer ayant deux axes de symétrie, la position du centre de gravité C se trouve donc parfaitement déterminée.

Partageons la partie située à gauche de l'axe XX en surfaces élémentaires, dont nous saurons déterminer facilement les cen-

tres de gravité. Mesurons ces surfaces et formons, au moyen des longueurs proportionnelles 1,2,...6, le polygone des forces mn (fig. 280). Prenant alors b comme distance polaire, nous pourrons construire le polygone funiculaire correspondant $\alpha\beta\gamma\eta\theta\omega\pi\lambda$. Les côtés de ce polygone-enveloppe sont tangentes à la courbe funiculaire, et leurs points de tangence sont déterminés par les lignes de séparation des surfaces élémentaires.

L'axe XX étant un axe de symétrie de la section considérée, nous pourrons, au moyen d'une simple projection, construire la seconde moitié du polygone funiculaire.

Portons dans le polygone des forces en np la longueur mn ; le rayon op du polygone des forces devra être parallèle au dernier côté du polygone funiculaire $\tau\rho$.

La surface comprise entre la courbe funiculaire et ses tangentes extrêmes prolongées est, comme nous l'avons démontré plus haut, proportionnelle au moment d'inertie cherché. En raison de la symétrie, il nous suffira de mesurer la moitié de cette surface et de multiplier par 2 le résultat obtenu.

Dans le tracé de la courbe funiculaire, nous n'avons indiqué que la parabole correspondant à la partie qr et nous avons admis que, dans ses autres parties, cette courbe se confondait avec ses tangentes. A la simple inspection de la figure on verra que l'erreur ainsi commise est complètement insignifiante.

Transformons la demi surface en un triangle équivalent $\alpha A\rho$ et portons en αk le double de la base c ; la longueur trouvée rr multipliée par deux sera proportionnelle au moment d'inertie cherché.

Nous pourrons alors poser :

$$2 \cdot rr = i$$

$$J = 2 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot i.$$

Si les forces représentant les surfaces élémentaires ont été menées parallèlement à l'axe XX , le moment d'inertie trouvé se rapportera à l'axe XX .

Le fer I, représenté Pl. XVIII, fig. 279 en grandeur naturelle,

est un échantillon de l'album des fers de la Société Vezin-Aulnoye (Forges et laminoirs du Tilleul à Maubeuge et à Saint-Marcel à Hautmont, Nord).

Les bases qui ont servi à la construction de J , sont les suivantes :

$$a = 20^{\text{mm}}$$

$$b = 40^{\text{mm}}$$

$$c = 60^{\text{mm}}$$

Le résultat trouvé est :

$$i = 2 \cdot r r = 2 \cdot 23^{\text{mm}} = 46^{\text{mm}}$$

D'où :

$$J = 2 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot i = 2 \cdot 20 \cdot 40 \cdot 60 \cdot 46$$

$$J = 4416000^{\text{mm}^4}$$

Avec les bases a, b, c , exprimées en centimètres ou en mètres, nous obtiendrons comme résultats :

Dans le premier cas :

$$J = 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 4,6 = 441,6^{\text{cm}^4}$$

Dans le second :

$$J = 2 \cdot 0,02 \cdot 0,04 \cdot 0,06 \cdot 0,046 = 0,000000442^{\text{m}^4}$$

La section de ce fer est :

$$F = f \cdot a \cdot 89,8 \cdot 20 = 1796^{\text{mm}^2}$$

D'où son poids au mètre courant :

$$p = F \cdot 1000 \cdot \gamma = 1796 \cdot 1000 \cdot 7,79 = 14^{\text{kg}}$$

Nous avons pris la base $c = d$, la valeur du moment de résistance sera donc :

$$\frac{J}{d} = \frac{2 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot i}{c} = 2 \cdot a \cdot b \cdot i$$

$$\frac{J}{d} = 2 \cdot 20 \cdot 40 \cdot 60 \cdot 46 = 73600^{\text{mm}^3}$$

Soit maintenant à déterminer le moment d'inertie du même fer I par rapport à l'axe $X_1 X_1$ situé à une distance x de l'axe XX .

Le polygone funiculaire construit dans le cas précédent nous servira encore ; nous en prolongerons les deux côtés extrêmes

jusqu'à l'axe $X_1 X_1$, et le double de la surface du triangle ρst sera à ajouter au résultat trouvé ci-dessus.

Pour cela, mesurons la surface de ce triangle ρst en le rapportant à la base c et soit i_1 la longueur proportionnelle trouvée. Nous aurons en désignant par J_1 le moment d'inertie rapporté à l'axe $X_1 X_1$:

$$J_1 = 2 \cdot a \cdot b \cdot c (i + i_1).$$

Comme on le démontre dans le cours de résistance des matériaux, la relation suivante existe entre les deux moments d'inertie rapportés aux deux axes XX et $X_1 X_1$, savoir :

$$J_1 = J + Fx^2.$$

Comme résultat de construction (Pl. XVIII, fig. 281), nous avons trouvé :

$$i_1 = 16,84^{\text{mm}}.$$

D'où :

$$i + i_1 = 46 + 16,84 = 62^{\text{mm}},84.$$

Le moment d'inertie J_1 aura donc pour valeur :

$$J_1 = 2 \cdot a \cdot b \cdot c (i + i_1) = 2 \cdot 20 \cdot 40 \cdot 60 \cdot 62,84$$

$$J_1 = 6032400^{\text{mm}^4}.$$

La valeur de ce même moment calculée au moyen de la seconde formule sera :

$$J_1 = J + Fx^2 = 4416000 + 1796 \cdot \overline{30}^2 = 6032400^{\text{mm}^4}.$$

Comme on peut le voir, nous saurons déterminer la valeur du moment d'inertie par rapport à un axe quelconque.

Si le fer I considéré (Pl. XVIII, fig. 280) se trouve soumis à l'action de forces parallèles à l'axe de yy , le moment d'inertie doit être rapporté à l'axe XX . Si les forces étaient parallèles à l'axe XX le moment d'inertie serait à prendre par rapport à l'axe yy .

Nous pourrions encore établir entre le moment d'inertie et la surface d'un même profil la relation suivante :

$$J = Fr^2$$

où r représente le rayon de giration.

De là, l'équation :

$$r^2 = \frac{J}{F} = \frac{2 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot i}{a \cdot f} = \frac{2 \cdot b \cdot c \cdot i}{f}.$$

Si nous prenons $2c = f$, nous aurons :

$$r^2 = b \cdot i;$$

ou bien :

$$r = \sqrt{b \cdot i}.$$

Autrement dit, le rayon de giration est moyenne proportionnelle entre les deux quantités b et i .

L'expression $\sqrt{b \cdot i}$, peut se construire graphiquement d'une manière excessivement simple. Nous avons donné un exemple d'une telle construction (Pl. I, fig. 6 et 7).

Si nous déterminons les valeurs de r correspondant à tous les axes passant par le centre de gravité, et si, à partir de C, nous portons sur chaque axe la valeur trouvée, nous obtiendrons, en joignant par un trait continu les extrémités de r , une ellipse. Cette ellipse s'appelle l'ellipse d'inertie de la section considérée et l'ellipse correspondant au centre de gravité s'appelle l'ellipse centrale.

Le petit axe de cette ellipse coïncide avec l'axe pour lequel le moment d'inertie est un minimum, le grand axe correspond au maximum.

Or nous savons qu'une ellipse est parfaitement déterminée lorsque les valeurs du grand axe et du petit axe sont connues. Dans chaque cas particulier, nous n'aurons donc qu'à construire les valeurs maxima et minima du moment d'inertie.

Dans une surface à un axe de symétrie, le grand axe de l'ellipse coïncide avec l'axe de symétrie, tandis que le petit axe est encore indéterminé.

Dans une surface à deux axes de symétrie, les deux axes de l'ellipse se confondent avec les axes de symétrie.

Pour une surface régulière, l'ellipse d'inertie se transforme en un cercle; il suffit alors dans ce cas de construire une seule valeur de r .

Moment d'inertie d'une section composée de deux cornières.

Soit (Pl. XIX, fig. 282) une section composée de deux cornières réunies en croix. Cette section a deux axes de symétrie. Le centre de gravité C est le point d'intersection de ces deux axes. Pour l'un d'eux, le moment d'inertie sera un maximum.

Si donc nous construisons les deux moments d'inertie J_x et J_y correspondant aux axes XX et YY , l'ellipse d'inertie sera par là-même parfaitement déterminée.

Pour construire le moment d'inertie J_x , partageons la section considérée, ou simplement encore le quart de cette section, en lamelles parallèles à l'axe XX .

Mesurons ces surfaces élémentaires et formons au moyen des longueurs proportionnelles prises en double le polygone des forces mn (fig. 283). Prenons comme distance polaire $on = b$ et construisons le polygone funiculaire correspondant $\alpha\beta\gamma\delta\eta$ (fig. 284). Traçons la courbe funiculaire αs et prolongeons le côté $\alpha\beta$ jusqu'à sa rencontre avec l'axe XX . La surface ainsi obtenue $\alpha s\rho$ (surface ombrée sur l'épure) multipliée par deux sera proportionnelle au moment d'inertie J_x . Rapportons cette surface à la base $c = \frac{f}{2} = mn$ et pour cela transformons-la en un triangle équivalent $\alpha\rho A$. La longueur rr ainsi obtenue représentera le double de la surface ombrée; par suite $i_x = rr$ se rapportera à la section entière.

Ayant pris la base $c = \frac{f}{2}$ le rayon de giration correspondant à l'axe XX aura pour expression :

$$r_x = \sqrt{b \cdot i_x}.$$

La détermination graphique de r_x est indiquée (fig. 285) où $ps = b$, $sq = i_x$, $po = oq$ et $st = r_x$. Ce rayon r_x se trouve porté en C_v et C_u (fig. 282) c'est un axe de l'ellipse d'inertie.

Déterminons maintenant le moment d'inertie de cette même section par rapport à l'axe YY .

Pour cela décomposons un quart de la section en lamelles paral-

lèles à l'axe YY. Mesurons chacune de ces surfaces élémentaires et portons le double des résultats trouvés en $m'n'$. Au moyen du polygone des forces $o'm'n'$, nous construirons le polygone funiculaire correspondant $\alpha\beta\gamma\delta\eta\omega$ (fig. 287). La surface comprise entre la courbe funiculaire αe , la tangente $\alpha\beta$ prolongée, le côté $e\omega$ et l'axe YY est proportionnelle au moment d'inertie cherché. Transformons cette surface en un triangle équivalent $\alpha A\rho$ et mesurons ce triangle en le rapportant à la base $c = \frac{f}{2}$. La longueur i_y représentera le double de la surface ombrée; elle correspondra donc à la section totale.

Construisons ensuite l'expression :

$$r_y = \sqrt{b \cdot i_y}.$$

Cette construction est indiquée (fig. 288), où $ps = b$; $sq = i_y$, $op = oq$ et $st = r_y$.

Portons de même en Cs et Ct la valeur de ce rayon r_y ; la longueur st sera le second axe de l'ellipse.

Connaissant les deux axes, nous pourrions tracer facilement l'ellipse d'inertie centrale $sutv$.

Pour l'axe XX le moment d'inertie est minimum; pour l'axe YY, il est maximum.

$$\begin{aligned} J_x &= 2 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot i_x = a \cdot b \cdot f \cdot i_x = F \cdot r_x^2 \\ J_y &= 2 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot i_y = a \cdot b \cdot f \cdot i_y = F \cdot r_y^2. \end{aligned}$$

Pour les deux axes ZZ parallèles aux ailes des cornières, les moments d'inertie sont égaux et ont pour valeur :

$$J_z = Fr_z^2.$$

Les cornières, tracées en grandeur naturelle (Pl. XIX, fig. 282), sont des échantillons de l'Album des Fers de la société Vezin-Aulnoye, forges et laminoirs du Tilleul à Maubeuge et de Saint-Marcel à Hautmont (Nord).

Les bases de construction sont :

$$\begin{aligned} a &= 20\text{mm} \\ b &= 25\text{mm} \\ c &= \frac{f}{2} 34\text{mm}, 5. \end{aligned}$$

Les résultats trouvés :

$$i_x = 21,5 \text{ mm}$$

$$i_y = 35,25 \text{ mm}$$

$$r_x = 23,2 \text{ mm}$$

$$r_y = 29,7 \text{ mm}$$

$$r_z = 25,7 \text{ mm.}$$

Remplaçant les lettres par leurs valeurs dans les équations données ci-dessus, nous aurons :

$$F = a \cdot f = 20 \cdot 67 = 1380 \text{ mm}^2$$

$$\frac{p}{2} = 1380 \cdot 1000 \cdot 7,79 = 5^{\text{kg}},37 \text{ pour 1 cornière}$$

$$p = 10^{\text{kg}},75 \text{ pour les deux}$$

$$\begin{aligned} J_x &= 2 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot i_x = a \cdot b \cdot f \cdot i_y \\ &= 20 \cdot 25 \cdot 69 \cdot 21,5 = 741750 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_y &= 2 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot i_y = a \cdot b \cdot f \cdot i_x \\ &= 20 \cdot 25 \cdot 69 \cdot 35,25 = 1216125 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

$$J_x = F \cdot r_x^2 = 1380 \cdot \overline{23,2^2} = 741750 \text{ mm}^4$$

$$J_y = F \cdot r_y^2 = 1380 \cdot \overline{29,7^2} = 1215780 \text{ mm}^4$$

$$J_z = F \cdot r_z^2 = 1380 \cdot \overline{25,7^2} = 918583 \text{ mm}^4.$$

TABLE DES MATIÈRES

NOTIONS PRÉLIMINAIRES DU CALCUL GRAPHIQUE

Addition et soustraction	1
Multiplication et division	2
Élévation à la deuxième puissance	4
Racine carrée	4
Construction de la moyenne proportionnelle	5
Représentation des surfaces par des longueurs.	6
Surface d'un triangle.	7
Surface d'un quadrilatère.	8
Surface d'un rectangle	9
Surface d'un parallélogramme.	10
Surface d'un trapèze	10
Surface d'un polygone	11
Surface d'un segment parabolique	13
Surface d'une figure limitée par une courbe quelconque	14
Représentation d'un volume par une ligne proportionnelle	17
Représentation d'autres expressions analytiques par des lignes proportionnelles.	
Moment statique d'une force	21
Moment d'une surface	22
Moment d'inerties de surfaces planes	23
Observations.	25

ÉLÉMENTS DE LA STATIQUE GRAPHIQUE

Des forces en général et de leur résultante.	25
De la résultante de deux forces dont les directions se coupent en un point.	26
De la résultante de plusieurs forces dont les directions se coupent en un même point	27
De la résultante des forces ne se coupant pas en un même point.	29
De la résultante des forces parallèles.	
Les forces parallèles sont de même sens.	31
De la résultante des forces parallèles et de directions opposées.	33
Décomposition des forces en composantes.	
Décompositions d'une force en deux composantes de directions	

données.	39
Décomposition d'une force en trois composantes dont les directions ne se coupent pas en un même point.	42
Des poutres	42
Poutre reposant en ses deux extrémités	44
Détermination des réactions.	44
Des moments fléchissants dans une poutre reposant sur deux points d'appui.	47
Des efforts tranchants.	52
Des moments fléchissants et des efforts tranchants sous une charge répartie uniformément ou d'une manière variable.	
Charge répartie d'une manière variable.	54
Charge uniformément répartie.	59
Des moments fléchissants et des efforts tranchants dans le cas de surcharges partielles uniformément réparties et dans le cas de surcharges mixtes.	
La poutre se trouve chargée uniformément ; mais seulement sur une partie de sa longueur	64
La poutre est soumise à l'influence de différentes charges uniformément réparties.	65
La poutre est soumise à l'action de surcharges concentrées et de surcharges réparties	67
Poutre supportée en une extrémité	68
Poutre reposant en deux points d'appui intermédiaires.	72
Surcharge mobile	80
Construction des moments fléchissants et des efforts tranchants maxima dans le cas d'une poutre reposant en ses deux extrémités et portant une surcharge uniformément répartie	83
Construction des moment fléchissants et des efforts tranchants maxima dans une poutre supportée en ses deux extrémités sous l'action des charges mobiles concentrées.	89
DES FORCES EXTÉRIEURES ET DES FORCES INTÉRIEURES DANS UNE CONSTRUCTION.	97
POUTRES DONT LES DIFFÉRENTES PARTIES NE SONT SOUMISES QU'À DES EFFORTS DE TENSION OU DE COMPRESSION	
Cas général	102
Formé d'une poutre sous l'action de différentes charges verticales	103
Poutre parabolique.	107
Poutre en forme de parabole du troisième degré	109

POUTRES DANS LESQUELLES UNE SECTION QUELCONQUE NE
RENCONTRE QUE DEUX ÉLÉMENTS TRAVAILLANT A LA TENSION OU A
LA COMPRESSION

Cas général	114
Forme de poutre correspondant à une charge symétrique.	115
Poutre parabolique avec tirant	119
Poutre parabolique avec tirant en forme de parabole du troisiè- me degré	125
Poutre composée de deux éléments supportée à une seule extré- mité.	126

POUTRES DANS LESQUELLES UNE SECTION RENCONTRE TROIS
OU PLUSIEURS ÉLÉMENTS NE TRAVAILLANT QU'A LA TENSION OU A LA
COMPRESSION.

Cas général	126
Construction des forces intérieures.	
Méthode de Culmann	128
Méthode de Ritter. Méthode des moments statiques.	
Premier exemple.	129
Deuxième exemple	132
Troisième exemple	135
Méthode de Cremona.	140
Observations générales relatives aux poutres à trois ou plusieurs éléments.	143
Poutres en treillis à membrures parallèles.	144
Poutre parabolique.	
Poutre parabolique dont la membrure supérieure se trouve sou- mise à un effort constant	151
Poutre parabolique dont la membrure inférieure se trouve sou- mise à un effort constant	155
Poutre en forme de croissant	159
Poutres multiples.	
Poutre à treillis double symétrique	161
Poutre à treillis quadruple symétrique.	166
Combinaison de poutres du premier et du second ordre.	171

DONNÉES GÉNÉRALES SUR LE POIDS PROPRE DES DIFFÉRENTES
CONSTRUCTIONS ET SUR LES SURCHARGES QU'ELLES PEUVENT AVOIR
A SUPPORTER

Charge permanente.

Poids des matériaux employés dans la construction.	175
Poids permanent des toitures au mètre superficiel	176
Poids propres des planchers et plafonds	178
Surcharge accidentelle.	
Surcharges des chambres d'appartement, salles de réceptions, magasins, etc.	180
Surcharge provenant d'une couche de neige	180
Pression du vent.	182

EXEMPLES

Ferme Polonceau à une bielle.	184
Des efforts dans une ferme Polonceau à une seule bielle, le vent étant supposé n'agir que sur un seul côté de la toiture	186
Ferme Polonceau à trois bielles.	
Fermes employées dans le cas des portées faibles	193
Comparaison de quelques systèmes de fermes	195
Poutres à treillis symétrique.	196
Poutre à treillis avec montants travaillant à la compression.	197
Poutre à treillis avec montants travaillant à la tension	198
Epure d'une ferme composée de poutres de plusieurs systèmes	199
Poutre parabolique à membrure supérieure de section constant	204
Poutre parabolique à membrure inférieure de section constante	206
Poutre en forme de croissant	207
Ferme reposant en deux points intermédiaires.	209
Ferme reposant en deux points avec marquises d'un seul côté.	210
Ferme pour marquise à fiches et contre-fiches	213
Ferme pour marquise à montants et contrefiches	214
Consoles.	214
Ferme à entrain surchargé.	215
Ferme Polonceau à une seule bielle et à arbalétriers composés.	216
Poutre à treillis symétrique double.	218
Poutre à treillis symétrique quadruple.	218

DÉTERMINATION GRAPHIQUE DES MOMENTS D'INERTIE DES SURFACES PLANES

Construction graphique du centre de gravité des surfaces planes.	222
Détermination graphique du moment d'inertie d'une surface plane.	226
Moment d'inertie d'un fer I.	229
Moment d'inertie d'une section composée de deux cornières.	234